

301.354



**Digitalizálta**  
**a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtár**  
**és Információs Központ**





# ÉRTEKEZÉSEK

A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

---

XIV. KÖTET. 4. SZÁM. 1890.

---

A

## LÁNCZHIDAK MEREVITŐ TARTÓINAK GRAFIKAI ELMÉLETÉRŐL.

KHERNDL ANTAL

I. TAGTÓL.

(2 RAJZLAP-MELLÉKLETTEL.)

(Székfoglaló értekezés 1890. évi november hó 17-én.)

---

Ára 50 kr.

---

BUDAPEST.

KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

1891.

Eddig külön megjelent

# É R T E K E Z É S E K

a matematikai tudományok köréből.

**Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet.**

**Ötödik kötet.**

**Hatodik kötet.**

I. *Konkoly Miklós*. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós*. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitív pályaszámítása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignác* kir. observatorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido*. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos*. A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós*. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós*. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós*. Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

**Hetedik kötet.**

I. *Konkoly Miklós*. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositio után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós*. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós*. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós*. A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő*. A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklós*. Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek László*. Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos*. Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetítésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor*. Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós*. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós*. Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós*. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós*. Adatok Jupiter és Mars physikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór*. A fény törése és visszaverése homogen isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánosításával és bővítésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór*. A sarkított fényrengés elhajlító rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán*. A telített gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyady Jenő*. Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő*. Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor*. Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr.



# ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

---

## A LÁNCZHIDAK MEREVÍTŐ TARTÓINAK GRAFIKAI ELMÉLETÉRŐL.

KHERNDL ANTAL levelező tagtól.

(2 rajzlap-melléklettel.)

(Székfoglaló értekezés 1890 nov. 17.)

### I. RÉSZ.

Az az eset, ha a merevítő tartó támaszpontjainak függőlegesei  
a láncz felfüggesztő pontjain mennek át.

#### 1. §. Előzmények.

A budapesti lánczhid szilárdsági viszonyainak megvizsgálása két év előtt arra indította ez értekezés szerzőjét, hogy a merevítő tartók elméletével is behatóbban foglalkozzék, főképp geometriai irányban, mint azt a fenforgó kérdés közvetlenül megkívánta.\*

---

\* A hid-erőten e fejezetének irodalmát illetőleg a következők említendők föl e helyen. Az első, ki a merevítő tartókra ható külső erők meghatározására elméletet dolgozott ki, a grafosztatika megállapítója *Culmann* volt. Elmélete azonban, melyet először 1851-ben tett közzé, még azon föltevésen alapult, hogy a merevítő tartónak csak azon támaszpontján keletkezik reakció, a mely a mozgó teher súlypontjához közelebb esik (*Graph. Stat.* 1. Aufl. 1866. és *Förster Allg. Bauz.* 1851). *Ritter* (Zürichben) volt az első, ki a rugalmasságtan alapján vezette le a merevítő tartók elméletét (*Erbkamm* 1877; *Schweiz. Bauz.* 1883), a

Ismeretes, hogy a merevítő tartók abból az okból alkalmaztatnak, hogy a híd szerkezet behajlását mérsékeljék. A láncz-hidak rendszeren a kocsit két szélén szereltetnek föl ily tartókkal, a melyekkel a hidpálya összekötöttetik s a melyek fölfüggesztetnek a függővasak által a lánczokra, végeiken a hidoszlopokon pedig alá is vannak támasztva. E tartók magas és erős tömör vagy rácsos szerkezetekből állanak s minthogy valamint a hidpályával úgy lánczokkal is össze vannak kötve, ez okból a híd szerkezet behajlása a merevítő tartók alkalmazása által a lánczhidakon is arra a mértékre szállíttatik alá, a melyet e tartók rugalmas alakváltozásai megengednek.

Abban az esetben, ha a merevítő tartó a hidnyílás valamely pontján úgy nevezett elválasztó csuklóval van felszerelve (t. i. oly módon, hogy két része csak a csukló által van összekötve), a külső erők sztatikailag határozottak lévén, kiszámításuk vagy megszerkesztésük semmi nehézséget sem okoz. A jelen értekezésben ez okból csak azok a merevítő tartók fognak tárgyalatni, a melyek végeiken ugyan csuklókra támaszkodnak a hidoszlopokon (még pedig egyik végükön oly csuklóra, a mely vízszintes irányban elmozdulhat), szerkezetük egyéb részében azonban nincsenek elválasztó csuklóval felszerelve s a tárgyalás a jelen I. részben arra az esetre fog kiterjedni, ha a támaszpontok függőlegeseinek távolsága (az ú. n. elméleti hidnyílás), a merevítő tartón ugyanaz, mint a függő tartón; a II. részben pedig arra az általánosabb esetre, ha az elméleti hidnyílás a merevítő tartón kisebb, mint a függő tartón.

A lánczhidak merevítő tartóira ható külső erők működés-módjának egyes törvényei már a fentebb mondottakból következnek. Tudjuk ugyanis, hogy a láncz (s minden egyéb *hajlékony* függőtartó) csak akkor van egyensúlyban, ha erőtani tengelye összeesik a reá ható külső erők kötélvonalával s másrészt az is ismeretes, hogy ha megváltoznak az erők, kötélvonaluk

---

melyet utána főkép *Müller-Bresslau* tökéletesített (Neuere Meth. d. Fest. Lehre és Hannov. Ztschr. 1881—83). A francia irodalomban *Lévy* tárgyalta először a merevítő tartók elméletét a rugalmasságtan alapján (Ann. d. P. et Ch. 1886). Valamint *Ritter* és *Müller-Bresslau*, úgy *Lévy* módszere is analitikai.



esakis akkor maradhat ennek daczára mégis változatlan, ha az erők mind ugyanabban az arányban változnak meg. Minthogy pedig a láncz, ha elég szilárd merevítő tartóval van fölszerelve, a mint föntebb láttuk, a rugalmas deformáció határain belül állandó alakú, ebből a föntebb mondottak szerint az következik, hogy a merevítő tartók *minden* mozgó terhet *ugyanabban* az arányban osztanak el valamennyi függővasra, abban az arányban t. i., a melyben a hidszerkezet saját súlya oszlik el azokra, bármily nagyságú legyen is e mozgó teher s bármily részét a hidnyílásnak foglalja is el.

Ebből viszont az következik, hogy a merevítő tartókra ható külső erők meghatározásának föladatát megoldottnak tekinthetjük, a mint a láncz vízszintes reakcióját ismerjük.

A függő tartóra ható külső erők háromszögében ugyanis a sugarak párhuzamosak a láncz egyes szakaszaival s az alapot az imént említett ismert arányban osztják azokra a részekre, a melyek az egyes függővasak reakcióit jelentik. A magasságot pedig a vízszintes reakció adja meg. A mint ez ismeretes, akkor könnyen meg lehet szerkeszteni (vagy ki lehet számítani) a függővas-reakciókat. Már pedig csak ezek ismeretlenek a merevítő tartóra ható külső erők között.

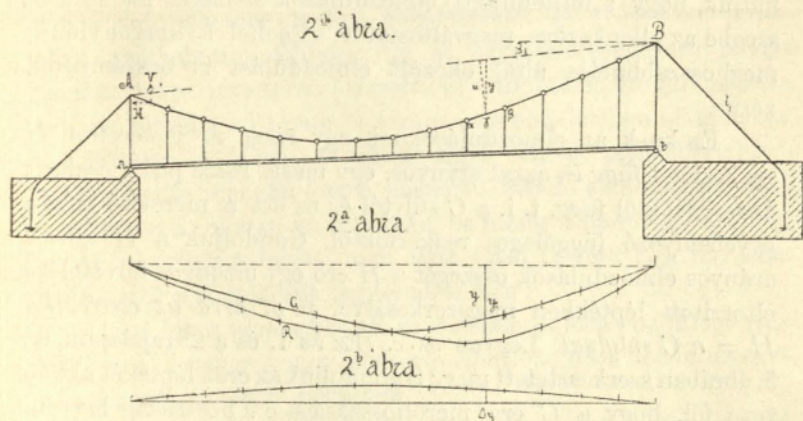
Végre még a következő tétel is a már föntebb mondottakból következik. Vizsgáljuk meg azt az általánosabb esetet, ha az elméleti hidnyílás a lánczon nagyobb mint a merevítő tartón s gondoljuk a merevítő tartóra ható külső erők kötélpoligónját megszerkesztve (1—1a ábra). Legyen ebben  $G$  a súlyoknak,  $R$  pedig a függővas-reakcióknak kötélvonala. Ha az erőháromszög magasságát az ismeretlen vízszintes reakcióval,  $H$ -val egyenlővé téve gondoljuk, akkor az  $R$  poligón függőleges metszékei az  $a_1b_1$  lánczrész függőleges ordinátaival fognak egyenlőek lenni, föltéve, hogy az  $a_1b_1$  pontok az  $ab$  támaszpontok függőlegeseiben vannak. Az 1a ábra, a mint ezekből látjuk, teljesen egyezik az  $a_1b_1$  pontokon fölfüggesztettnek gondolt *merev* szerkezetű oly függőtartóra ható nyomatók ábrájával, a mely csak  $a_1$ -től  $b_1$ -ig ér,  $a_1b_1$  között egészen oly alakú, mint a láncz s a melyet ugyanazokkal a súlyokkal gondolunk *közvetlenül* (t. i. merevítő tartó közbenjárása nélkül) megterhelve, a melyek tényleg az  $ab$  merevítő tartóra hatnak. *A hajlító nyoma-*





2. §. Annak a vízszintes reakciónak megszerkesztése, a melyet a hidon áthaladó súly idéz elő.

A mint fentebb láttuk, a föladat tárgyát a láncz vízszintes reakciójának meghatározása képezi. Még pedig első sorban a hidon áthaladó egyetlen egy  $C$  súly esetére oldandó meg e föladat; mert tudjuk, hogy ha e súlynak minden megkívánt helyzetére ismeretes a reakció, akkor az ismeretes módszerek segítségével meg lehet szerkeszteni (vagy ki lehet számítani) azt a reakciót is, a melyet tetszőleges megterhelés idéz elő.



Hogy pedig meg lehessen határozni a reakciót, e végből azt kell a szerkesztésben (vagy a számításban) kifejezni, a mi a reakció keletkezését okozza, azt t. i., hogy a láncz deformációja egyrészt ahhoz a föltételhez van kötve, hogy a merevítő tartó és a láncz közötti ordináták annyit hosszabbulnak meg, mint a függővasak; másrészt ahhoz a föltételhez, hogy a láncz  $B$  végpontja az  $AB$  irányban annyit mozdul el, a mennyit a horgonyláncz meghosszabbulása esetleg megenged. (2. ábra.)

A  $B$  pont  $AB$  irányú elmozdulását, az egyes indító okokhoz képest egyes részekben határozzuk meg. Külön szerkesztjük meg nevezetesen azt az elmozdulást (t. i. az elmozdulásnak azt a részét), a melyet a merevítő tartó deformációja okoz a függő-

tartón, még pedig a merevítő tartóra ható minden egyes erőre nézve külön-külön; ismét külön azt az elmozdulást, a melyet a húzó igénybevétel következtében a láncz meghosszabbulása *közzvetlenül* okoz (t. i. a csomópontok körüli forgások *nélkül*); külön azt az elmozdulást, a melyet a láncz meghosszabbulása a csomópontokon bekövetkező forgások által idéz elő; külön azt, a melyet a függővasak meghosszabbulása okoz s végre szintén külön azt az elmozdulást, a melyet a horgonylánczok meghosszabbulása enged meg, illetőleg idéz elő. S minthogy az egész elmozdulás annyit tesz, a mennyit a horgonyláncz meghosszabbulása enged meg, ennek következtében azt is kimondhatjuk, hogy a föntemlitett elmozdulások összege, ha ez összegbe az ellenkezőre megváltoztatott előjellel a horgonyláncz meghosszabbulása által okozott elmozdulást is beszámítjuk, zérus.

Ezeknek az elmozdulásoknak egy része az ismeretlen  $H$  reakziótól függ és azzal arányos, egy másik része pedig csak az *ismert* erőktől függ, t. i. a  $C$  súlytól és az ezt a merevítő tartón egyensúlyozó függőleges reakzióktól. Gondoljuk a  $H$  erővel arányos elmozdulások összegét a  $H$  erő egy bizonyos fölvételére eltorzított léptékben megszerkesztve, *p. o. arra az esetre, ha  $H = a C$  súlylyal*. Legyen ez  $c$ . (Ez az 1. és a 2. rajzlapon az 5. ábrában szerkesztetett meg.) S gondoljuk az erők léptékét akképvéve föl, hogy a  $C$  erő mérőhosszasága  $c$  hosszúság legyen. Világos, hogy akkor, bármilyen nagy legyen is a  $H$  erő, a vele arányos elmozdulások eltorzított mérőhosszaságát a  $H$  erő mérőhosszasága fogja megadni. S viszont, ha ismerjük a  $H$  erővel arányos elmozdulások összegét abban a léptékben, a melyben a  $c$  elmozdulást megszerkesztettük, akkor ez megadja annak a  $H$  erőnek mérőhosszaságát, a mely ezt az elmozdulást létrehozni képes, abban az erőléptékben, a melyben  $c$  a  $C$  erő mérőhosszasága. Gondoljuk most már ezek után a  $H$  erőtől független elmozdulások összegét is megszerkesztve, még pedig szintén a többször említett eltorzított léptékben. Legyen ez  $h$ . (Lásd az 1—2. rajzlapon a 6. ábrát.) *Minthogy az összes elmozdulás zérus, ennek következtében ez a  $h$  elmozdulás megadja azt, hogy mennyit kell tenni az ismeretlen  $H$  erővel arányos elmozdulások összegének* (az ellenkezőre megváltoztatott előjellel véve)



megadja tehát a fentebbiek szerint a keresett  $H$  erő mérőhosszát.

A hidon áthaladó súly különböző helyzeteiben keletkező  $H$  reakció meghatározására meg kell tehát ezek szerint szerkesztenünk egyrészt a  $H$ -val arányos elmozdulások  $c$  összegét  $H = C$  fölvételre egy- és mindenkorra s másrészt a  $H$ -tól független elmozdulások  $h$  összegét a  $C$  súly minden megkívánt helyzetére.

Erre az alább következőkben a rugalmas deformációnak az a grafikai elmélete alkalmaztatik, a melyet ez értekezés szerzője a tömör rudakra nézve általánosabb szempontból a M. M. É. E. K.-nek 1883. évfolyamában részletesen közzétett, miután azt a műegyetemen tartott előadásában az 1879—80. tanév eleje óta, valamint a tömör úgy az egyszeres rendszerű rácsos szerkezetekre ismételve levezette és a többtámaszú gerendatartók s a kéttámaszú tömör és rácsos ívek elméletében alkalmazta s 1883-ban a Mérn. és Épít. Egyl.-ben is megismertette.\* A szerkesztés menetét tömör merevítő tartók alkalmazása esetére az 1—2. rajzlap mutatja. (Az, ha rácsos a merevítő tartó, ez semmi lényeges változást nem okoz. Lásd II. rész 1. §. 1c.) Magyarázatul a következők jegyzendők meg:

1. *A láncz végpontjának az az elmozdulása (az átfogó irányában), a melyet a merevítő tartó elhajlása okoz abban az esetben, ha e tartó tömör szerkezetű.*

A fentebb mondottak szerint e helyen nem számítjuk be azt az elmozdulást, a melyet a függővasak (és a függőtartó) meghosszabbulása okoz. Az itt szóban forgó elmozdulás meghatározásában tehát abból kell kiindulnunk, hogy a merevítő tartó elhajlása következtében a függőleges elmozdulásnak a függőtartó minden csomópontján ugyanannyit kell tennie, mint a merevítő tartón az ugyanabban a függőlegesben levő ponton.

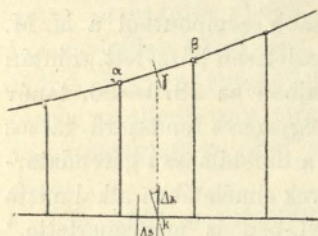
A merevítő tartó hajlító szilárdságára van igénybe véve és ha erőteni tengelye nem áll vízszintes egyenesből, akkor abszolút szilárdságára is. A következőkben azonban csak a hajlító

---

\* Azoknak ismertetését, a melyek ez elméletből az alább következőkben alkalmaztatnak, lásd a szerzőnek a jelen értekezéséről tartott előadásában: Math. és Term. Tud. Értesítő f. é. IX. köt. 3—4. füzet.

igénybevétel deformációja fog tekintetbe vétetni. A nyíró és esetleg az abszolút igénybevétel befolyása igen csekély, miért is ezt annál inkább el fogjuk hanyagolhatni, mert tekintetbe vétele semmi nehézséget sem okoz.

Vizsgáljuk meg a merevítő tartó valamely  $\Delta s$  eleme deformációjának befolyását a függőtartóra. (3. ábra.) Legyen a  $k$  keresztmetszetnek forgási szöge a  $k$  közömbös tengely körül, a

3<sup>a</sup> ábra.

$\Delta s$ -vel előbb levő keresztmetszethez képest  $\Delta x$ . Az e deformáció által valamely más ponton okozott elmozdulás a  $k$  ponton működő erőnek képzelt  $\Delta x$  szögmérték nyomatéka által van megadva, ama pont elmozdulási egyenesére mint tengelyre nézve. Az már most, hogy a  $\Delta x$  forgás következtében a függőtartónak minden következő pontja függőlegesen ugyanannyit mozduljon

el, mint a merevítő tartónak ugyanabban a függőlegesben levő pontja, csak úgy lehetséges, ha a függőtartón a  $\Delta s$  melletti két szomszédos  $a$  és  $\beta$  csomóponton oly forgások következnek be, hogy a  $\Delta a$  és  $\Delta \beta$  szögmértékeknek mint képzelt erőknek nyomatéka minden következő függőlegesre nézve ugyanaz legyen, mint a  $k$  ponton fölvett  $\Delta x$  képzelt erőé. És ha a  $\Delta s$  elem deformációjából a függőtartó alátámasztott pontján keletkező  $\Delta e$  elmozdulást keressük az  $AB$  egyenes irányában, akkor e  $\Delta a$  és  $\Delta \beta$  képzelt erők nyomatékösszegét kell meghatároznunk ez  $AB$  egyenesre nézve. Ez alkalommal azonban a  $\Delta a$  és  $\Delta \beta$  erőket eredőjük által is lehet pótolni és világos, hogy ez eredőnek az  $a\beta$  egyenes egyik pontján kell átmennie, valamint az is, hogy e pontnak a  $k$  pont függőlegesébe kell esnie, s nagyságra nézve  $\Delta x$ -val kell egyenlőnek lennie, másképp nem lehetne nyomatéka minden következő függőlegesre ugyanaz, mint a  $k$  ponton fölvett  $\Delta x$  képzelt erőé. A  $\Delta a$  és  $\Delta \beta$  szögeket tehát nem is szükséges meghatározni: azt a mozgást, a melyet a merevítő tartó egyes  $\Delta s$  elemeinek deformációja a függőtartó bármely következő pontján okoz, az által is meghatározhatjuk, ha úgy



járunk el, mintha a merevítő tartó minden egyes  $k$  keresztmetszetének  $\Delta x$  szög alatti forgása következtében a függőtartón az ugyanabban a függőlegesben fekvő  $\gamma$  ponton fölvett keresztmetszet ugyanama  $\Delta x$  szög alatt fordulna el a  $\gamma$  pont körül, mint a merevítő tartó  $k$  keresztmetszete a  $k$  pont körül.

A merevítő tartó keresztmetszetei forgási szögének képlete azonban

$$\Delta x = \frac{N \Delta s}{\varepsilon I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

hol  $N$  a külső erők nyomatéka,  $\Delta s$  az elem hosszúsága (ha a merevítő tartó erőtanai tengelye egyenes, akkor  $\Delta x$ ),  $I$  a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka,  $\varepsilon$  az anyag rugalmassági modulusa. A forgási szög tehát a merevítő tartó merevségét kifejező  $\varepsilon$ ,  $\Delta s$ ,  $I$  mennyiségeken kívül, csak az  $N$  hajlító nyomatéktól függ. Azonban föntebb (1. sz. képlet) azt találtuk, hogy ha a függőtartót *merevnek* gondoljuk, hogy ekkor a külső erők nyomatéka e függőtartó minden  $\gamma$  keresztmetszetén ugyanaz, mint a láncz merevítő tartójának  $k$  keresztmetszetén, a  $\gamma$  pont függőlegesében fekvő  $k$  ponton. Világos tehát, hogy a merevítő tartóval felszerelt láncz deformációját azon a módon határozhatjuk meg, mintha minden keresztmetszetében ép oly forgás keletkezne, mint a milyen oly *merev* függőtartón következik be (ugyanabban a keresztmetszetben), a melyen  $I$ ,  $\varepsilon$  és  $\Delta s$  oly nagy, mint a láncz merevítő tartóján. *Merevítő tartóval felszerelt lánczon ez okból a végpontnak azt az elmozdulását, a melyet a merevítő tartó meghajlása okoz, bármilyen alakú is a láncz és a merevítő tartó és bármi módon van is a híd megterhelve, teljesen ugyanazon a módon lehet kiszámítani vagy megszerkeszteni, mintha merev lenne a függőtartó* (s merevítő tartó közvetítése nélkül hordaná a terhet), *csak hogy  $\varepsilon$  és  $\Delta s$  vagy  $\Delta x$  alatt a merevítő tartó rugalmassági modulusát és ugyane tartó elemének hosszúságát kell érteni,  $I$  alatt pedig szintén a merevítő tartó keresztmetszeteinek tehetetlenségi nyomatékát.*

Minthogy pedig, a mint ismeretes és az alább következőkből is ki fog tetszeni, a merevítő tartó meghajlása okozza a függőtartó deformációjának legnagyobb részét s ezzel szemben igen keveset tesz ki az a deformáció, a melyet a függőtartó és

a függővasak meghosszabbulása idéz elő s minthogy továbbá a merevítő tartó meghajlása által a függőtartó végpontján okozott elmozdulásban a  $H$  erő és a többi erők által külön-külön előidézett két rész egymás közötti *viszonyára* az  $\varepsilon$ ,  $\Delta s$  és  $I$  mennyiségek, a gyakorlatban rendszeren alkalmazott méretek esetében, csekély befolyással vannak, ezek folytán az imént mondottakból még az is következik, hogy *a merevítő tartók alkalmazásának előnye a hajlékony tartókkal fölszerelt függőhidak szerkezetében, a magukban merev függőtartók alkalmazásával szemben (ezeket nem kötve össze merevítő tartókkal), rendszeren csak a híd pályá nagyobb merevségében és a merevítő tartó súlyelosztó képességében fekszik, nem pedig abban, mintha a vízszintes reakció lenne kisebb a merevítő tartóval fölszerelt hajlékony függőtartón, mint az ugyanoly erőtanú tengelyű — de magában merev szerkezetű — és merevítő tartóval össze nem kötött függőtartón.*

Ezek után a merevítő tartó deformációja által a függőtartón okozott elmozdulás meghatározására térve át, rajzoljuk meg (1-ső rajzlap 2-ik ábra) a láncz erőtanú tengelyét oly módon, hogy az  $AB$  átfogót vízszintesre vesszük föl s hogy a függőleges ordinátákat a vízszintes méretekhez képest  $\alpha$ -szorta eltorzítjuk. (Ezt az eltorzított vetületet, tekintve, hogy a lánczvonat kötélpolygon, minden nehézség nélkül meg lehet szerkeszteni; a 2-ik ábrában a függőleges ordináták eltorzításának szorzója  $\alpha=4$ ). A merevnek gondolt függőtartón már most a  $B$  pontnak az az  $AB$  irányú elmozdulása (2-ik szövegábra és 1-ső rajzlap, 1-ső ábra), a melyet  $Hy$  nyomaték okoz:

$$\Delta e_1 = \frac{Hy\Delta s}{\varepsilon I} u = \frac{H\Delta s}{\varepsilon I} y^2 \cos \beta.$$

(Lásd a 2-ik képletet is, a melyben  $N=Hy$ ). A  $H$  erő fentebb említett kísérleti értékét illetőleg, legcélszerűbb az alább következő szerkesztésekre nézve, ha azt a  $C$  súlylyal egyenlőnek vesszük fel, a mely esetben

$$\Delta e_1 = \frac{C\Delta s}{\varepsilon I} y^2 \cos \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

Az az elmozdulás pedig, a melyet  $C$  nagyságú valamely függőleges erő, p. o. a  $C$  súly okoz,



$$\Delta e_2 = \frac{Cx \Delta s}{\varepsilon I} u = \frac{C \Delta s}{\varepsilon I} xy \cos \beta \quad . \quad . \quad . \quad (2b)$$

És ha mindkettőt alkalmas mértékben eltorzítjuk, akkor

$$\Delta e_1 = \left( \frac{\Delta s}{\tau} \right) \frac{y^2}{ab}; \quad \Delta e_2 = \left( \frac{\Delta s}{\tau} \right) \frac{xy}{ab}$$

hol  $\tau = \frac{I}{I_0}$  a  $I$  mérő viszonyszámát jelenti az alapul fölvevett  $I_0$  tehetetlenségi nyomatékra nézve, míg a torzítás szorzója

$$\nu = \frac{\varepsilon I_0}{ab C \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

Ha az  $y$ -okat  $a$ -szorta eltorzítjuk, akkor  $\Delta e_1$  tovább torzul el  $a^2$ -szerte, a torzítás szorzója tehát

$$\nu = \frac{\varepsilon I_0 a^2}{ab C \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

fog lenni; azt pedig, hogy  $\Delta e_2$  is ugyanebben a léptékben torzítassék el, legegyszerűbben az által érjük el, ha megszerkesztésére  $b$  helyett a  $b_1 = \frac{b}{\alpha}$  alaphosszaságot használjuk. Látjuk ebből, hogy miután az  $u$  merőleges távolság helyett az  $y$  függőleges metszékeket lehet a szerkesztésbe behozni, a  $B$  pont  $AB$  irányú elmozdulását az előbb leírt módon rajzolt 2-ik ábra alapján valamennyi erőre nézve, mint a  $\left( \frac{\Delta s}{\tau} \right)$  képzelt erők cenzentrifugális nyomatékainak összegeit lehet megszerkeszteni két olyan tengelyre nézve, a melyek egyike az  $AB$  egyenes, másika pedig az illető erő irányvonala, megjegyzendő lévén, hogy a  $H$  erőnél e két egyenes összeesik.

Beosztjuk tehát a merevítő tartót elemekre, s a fentemlített képzelt erőket a láncz ama pontjain működőknek vesszük föl a 2-ik ábrában, a melyekben a merevítő tartó elemeinek függőleges középvonalai a láncz erőtani tengelyét átmetszik. (Az 1-ső rajzlapon előtüntetett példában  $I$  a merevítő tartón a támaszpontoktól a híd közepe felé  $5000 \text{ m}^2 \text{ cm}^2$ -től  $10000 \text{ m}^2 \text{ cm}^2$ -ig növekedőnek vétetett föl,  $I_0$  pedig  $= 2800 \text{ m}^2 \text{ cm}^2$ -re. Beosztó

pontok csak a függővasak helyein vétettek föl, megjegyzendő lévén, hogy rendszeren közelebb vannak egymáshoz a függővasak, mint az 1-ső ábrában fölvétetett, s hogy pontos erőtervekben különben is kisebb részekre kell osztani a merevítő tartót, s vele a láncot.) Először a merevítő tartó méretei alapján kiszá-

mított  $\frac{\Delta s}{\tau}$  mennyiségeket veszszük föl a lánc e pontjain működő

vízszintes erőknél, s megszerkesztjük ezek erő- és kötélpoligon-ját (3–4-ik ábra) a nyomatéki alapra nézve (az erőpoligon csúcspontja erre emlékeztetésül  $a$ -val van megjelölve), s a kötélpoligon oldalainak meghosszabbítása által megszerkesztjük az  $AB$  vízszintes meghosszabbításán a  $\Delta k_1$  metszékeket, tehát a

$\frac{\Delta s}{\tau}$  képzelt erők sztatikai nyomatékait. Erre megszerkesztjük,  $e\Delta k_1$

metszékeket előbb vízszintes, azután függőleges, újabb erőknek képzelve, ez újabb erők két kötélpoligonját (5-ik és 6-ik ábra), az erőpoligon magasságát az első esetben  $b$ -nek véve föl, a másodikban  $\frac{b}{\alpha}$ -nak. (A 4-ik ábrában erre tekintettel az egyik csúcspont  $b$ -vel van megjelölve, a másik  $\frac{b}{\alpha}$ -val.)

Az a  $c_1$  metszék most már, a melyet a vízszintesnek fölvett  $\Delta k_1$  erők kötélpoligonjában a két szélső oldal az  $AB$  vízszintes megnyújtásán képez (5-ik ábra), megadja a  $\frac{\Delta s}{\tau}$  képzelt erők tehetlenségi nyomatékát az  $AB$  egyenesre mint tengelyre nézve, megadja tehát a fentebbiek szerint azt az elmozdulást, melyet a  $H=C$  nagyságú  $H$  erő okoz a függőtartó  $B$  pontján  $AB$  irányban, a merevítő tartó hajlító igénybevétele következtében.

Az a  $h$  metszék pedig, a melyet a függőleges  $\Delta k_1$  erők kötélpoligonja és átfogója képez a  $C$  súly függőlegesen, (6-ik ábra) megadja azt az elmozdulást, a melyet az  $AB$  egyenesben gondolt  $H=C$  erő a  $C$  ponton függőleges irányban okoz, tehát megadja azt az elmozdulást is, a melyet a  $C$  ponton működő  $C$  súly (beértve ennek reakcióit is,) a  $B$  ponton  $AB$  irányban idéz elő.

Abban az esetben, ha a láncznak, a függővasaknak és a horgonylánczoknak meghosszabbulása által okozott deformációt a merevítő tartók meghajlása által előidézettthez képest el lehet hanyagolni, a  $h$  metszék már a keresett  $H$  reakció



mérő hosszúságát is megadja abban a léptékben, mint a  $c_1$  metszék a  $C$  súly mérőhosszaságát. Minthogy pedig eme hosszúságok megszerkesztésében a  $\beta$  szög egyáltalában nem szerepel, hanem csak az  $y$  metszékek, ezek pedig, (tekintve hogy az erőtani tengely kötélvonal), szintén nem függnek az  $AB$  átfogó irányától, hanem csak a függőtartó nyilmagasságától, ezek folytán az  $e$  pontban mondottakból még az is következik, hogy a pontosság ama határán belül, a melyet a függőtartó, — a függőtasak és a horgonyláncz meghosszabbulásának elhanyagolása jelöl ki, a merevítő tartóval felszerelt függőtartó vízszintes reakciója nem függ a fölfüggesztő pontok viszonylagos magassági helyzetétől, hogy tehát nem függ e körülménytől az sem, hogy valamely mozgó tehernek mily nagy részét viszi át a merevítő tartó a függőtartóra, hanem hogy a függőtartóra átvitt teher nagysága  $s$  ezzel egyetemben a vízszintes reakció nagysága is a merevítő tartó alakján  $s$  méretein és az elméleti hidnyílás nagyságán kívül csakis a függőtartó nyilmagasságától függ.

2. A láncz  $B$  végpontjának az az elmozdulása, a melyet erőtani tengelyének meghosszabbulása közvetlenül okoz az  $AB$  átfogó irányában, a húzó igénybevétel következtében. Az  $e$  § elején mondottak szerint a függőtartó meghosszabbulása által közvetlenül előidézett mozgás alatt azt értjük, a mely a csomópontok körüli forgások nélkül következik be. Ezt a mozgást tehát minden nehézség nélkül azon a módon lehet meghatározni, mint azt, a melyet *merer* rudak abszolút igénybevétele okoz. (Lásd a szerzőnek fentebb idézett értekezését is.) Hogy e tanulmány nagyon is hosszúra ne terjedjen ki, e helyen ez okból csak az az eset legyen részletesebben tárgyalva, a mely gyakorlatilag az egyedüli fontos, t. i. az az eset, ha a függőtartó úgy van méretezve, hogy a húzó feszültség egész kiterjedésében állandó vagy ettől oly kevésbé tér el, hogy állandónak lehet tekinteni. Ebben az esetben az abszolút igénybevétel által közvetlenül okozott alakváltozás abban áll, hogy minden méret ugyanabban az arányban hosszabbul meg, abban az arányban t. i. mint a függőtartó húzó igénybevétele ( $\sigma$ ) anyagának rugalmassági modulusához,  $\varepsilon_1$ -hez viszonylik. Ha tehát  $c_2$ -vel jelöljük meg a  $B$  végpont  $AB$  irányú most szóban forgó elmozdulását  $\nu$ -szerre ( $3b$  képlet) eltorzított léptékben, (t. i. az  $AB=s$  hosszúságú átfogó meg-

hosszabbulását); és  $F_0$ -val a függőtartó keresztmetszetének területét azon a helyen, hol erőtani tengelye vízszintes, (ha sehol sem lenne vízszintes, akkor az  $F_0$  mint segédmenyiség külön kiszámítandó) akkor

$$c_2 = s \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \nu = \frac{s}{\varepsilon_1} \frac{H}{F_0} \nu = \frac{2l_0}{\varepsilon_1 \cos \beta} \cdot \frac{H}{F_0} \cdot \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{ab C \cos \beta}$$

(a hol  $2l_0$  a függőtartó elméleti nyílása), tehát  $H=C$  esetére

$$c_2 = \frac{2l_0}{\varepsilon_1 F_0 \cos \beta} \cdot \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{ab \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Az 1. rajzlapon elötüntetett példában  $F_0=3000 \text{ cm}^2$ ;  $\cos \beta = 0.96$ ;  $2l_0=200 \text{ m}$ ;  $a=50 \text{ m}$ ;  $b=100 \text{ m}$ , tehát a 4. sz. képlet szerint  $c_2=0.648 \text{ m}$ .

Ha a csomópontokon nem következnenek be forgások, ha tehát a függőtartó mint *merev* rud viselkednék, akkor függőleges irányban is keletkeznének egyes pontjain elmozdulások, ( $\Delta y$ ), a melyek ismerete a következő pontban szükséges lesz. Miután e  $\Delta y$ -ok az  $y$  függőleges ordináták meghosszabbulásai, a fentebbiek szerint ezek arányosak a mondott  $y$  ordinátákkal. Ha tehát a  $\Delta y$ -ok ábráját megszerkesztve gondoljuk, ( $2b$  szöveg-ábra) akkor világos, hogy ebben a  $\Delta y$ -ok vonala a függőtartó erőtani tengelyéhez hasonló kötélvonal fog lenni, a melyet tehát a  $\Delta y$ -ok kiszámítása nélkül közvetlenül mint kötélvonalat lehet megszerkeszteni, egészen oly erőpoligon segítségével, mint a függőtartó erőtani tengelyét, csakhogy abban az alap  $\frac{\sigma}{\varepsilon_1} \nu$ -vel sokszorozandó, vagy a magasság ugyane mennyiséggel elosztandó. Ha tehát a függőtartó erőtani tengelyének erőpoligonjában az  $R$  alap és a  $H$  magasság közötti viszonyszám  $\frac{R}{H} = \gamma$ -nak neveztetik s a  $\Delta y$ -ok erőpoligonjában ugyane viszonyszám  $\gamma_1$ -nek, ha továbbá a  $\gamma_1$ -et is arra az esetre határoozzuk meg, ha  $H=C$ , akkor

$$\gamma_1 = \gamma \frac{\sigma}{\varepsilon_1} \nu = \frac{\gamma}{\varepsilon_1 F_0} \cdot \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{ab \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

a miből a szóban forgó erőpoligont meg lehet szerkeszteni, a magasságot alkalmas módon fölvéve, az alapot a 5a egyenlet



alapján kiszámítva (erre nézve lásd a 6. sz. egyenlet megokolásában később mondottakat is) s amaz arány szerint osztva be egyes részekre, a melyben a függőtartó erőtani tengelyének erőpoligonjában oszlik az alap részekre, (v. i. ugyanabban az arányban, a melyben a hidszerkezet saját súlya oszlik el az egyes függővasakra).

3. *A láncz B végpontjának az az elmozdulása, a melyet a függőtartó és a függővasak meghosszabbulása, forgások előidézése által okoz az AB átfogó irányában, a húzó igénybevétel következtében.* A függőtartó meghosszabbulása következtében a merevítő tartó és a függőtartó közötti *függőleges* metszékeknek nem szabad megváltozniok; oly forgásoknak kell tehát a csomópontok körül bekövetkezni, hogy ezek következtében az egyes csomópontok az imént meghatározott  $\Delta y$  hosszúságokkal emelkedjenek fölfelé, t. i. hogy mindegyik csomópont annyit emelkedjék a forgás következtében *függőlegesen fölfelé*, mint a mennyit forgás nélkül lefelé mozdulna el. (A  $\Delta y$  metszékek ez okból a 2b szöveg-ábrában a rendező tengely *fölíbe* rakattak föl.)

A függővasak meghosszabbulása következtében ellenben igenis meg kell nagyobbulni a merevítő tartó és a függőtartó közötti *függőleges* metszékeknek. Ennek következtében tehát újabb forgásoknak kell a csomópontokon bekövetkezni, még pedig oly mértékben, hogy az egyes csomópontok e forgások következtében annyit emelkedjenek *függőlegesen fölfelé*, a mennyit a függővasak meghosszabbulása tesz.

A föladat itt, a mint látjuk, a forgások mind a két csoportjánál abban áll, hogy meg van adva az, hogy mily *függőleges* mozgásokat okozzanak e forgások, s a kérdés az, hogy mily elmozdulást okoznak ugyane forgások a függőtartó végpontján az átfogó irányában.

Gondoljuk, hogy az előidézendő *függőleges* mozgások ábráját megszerkesztettük, a rendező tengely *fölíbe* rakva föl mindegyik pont *függőlegesében* e pont *fölemelkedését*. (A 2b szöveg ábra p. o. a  $\Delta y$  elmozdulások ábráját mutatja). Ha most alkalmasan választott valamely ponton át ez ábra oldalaival párhuzamos sugarakat húzunk, s e sugárnyalábot *függőleges* vonallal átmetszszük, világos, hogy ez által a képzelt erők poligonját nyertük meg azokra a forgásokra nézve, a melyek a szóban forgó

függőleges elmozdulások előidézésére szükségesek. S ha e képzelt erőket a függőtartó csomópontjain (mint forgási pontokon) át a függőtartó átfogójával párhuzamos irányban működő erőknek véve föl, kötélpolygon szerkesztése által nyomaték összegüket határozzuk meg a függőtartó átfogójára, mint nyomatéki egyenesre nézve, akkor ez megadja a keresett elmozdulást, azt az elmozdulást t. i., a melyet a szóban forgó forgások a függőtartó végpontján az átfogó irányában előidéznék.

A *függőtartó* meghosszabbulása folytán bekövetkező forgásokra nézve a képzelt erők erőpolygonját már az előbbeni pontban meghatároztuk (5a és az alább következő 6. sz. egyenlet.) A *függővasak* meghosszabbulási ábrájának megrajzolása  $\nu$ -szeres torzításban és  $H=C$  fölvételre szintén nem okoz nehézséget semmi esetben sem. A húzó feszültség  $\sigma$  mindig arányos  $H$ -val, (az arányossági tényezőt p. o. a hidszerkezet saját súlya által előidézett  $H$  és  $\sigma$  viszonya adja meg,) és így  $\nu$ -szeres torzításban és  $H=C$  fölvételre a  $H$  ismeretlen kiosztódik. A gyakorlatban azonban csak az az eset fontos, ha a függővasak akképp vannak méretezve, hogy a húzó feszültség valamennyiben ugyanaz. (Bármilyen is a megterhelés.) Ebben az esetben a meghosszabbulások arányosak az eredeti hosszaságokkal. Ha a torzítás  $\nu$ -szeres (3a képlet) és ha  $\varepsilon_2$  a függővasak anyagának rugalmassági modulusa, akkor az arányossági tényező  $= \frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu$ . És ha  $R$  a függővasak összes fölfüggesztő erejét jelenti,  $\Sigma F$  valamennyi függővas összes keresztmetszeti területét, az  $\frac{R}{H}$  állandó viszonyszámot pedig megint, mint fentebb  $\frac{R}{H} = \gamma$ -val jelöljük meg, akkor

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu = \frac{\nu}{\varepsilon_2} \frac{R}{\Sigma F} = \frac{\nu}{\varepsilon_2 \Sigma F} \gamma H = \frac{\gamma H}{\varepsilon_2 \Sigma F} \cdot \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{ab C \cos \beta}$$

tehát  $H=C$  fölvételre

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu = \frac{\gamma}{\varepsilon_2 \Sigma F} \cdot \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{ab \cos \beta} \quad . \quad . \quad . \quad : \quad (5b)$$

(Lásd erre nézve az alább következő 6. sz. egyenletet is és ennek megokolását.)



E képlet alapján könnyen meg lehet szerkeszteni, bármilyen alakú is a merevítő tartó és függőtartó erőtani tengelye, a függővasak meghosszabbulásainak ábráját s ebből viszont az épp említett módon a képzelt erők erőpoligonját a függővasak meghosszabbulása által előidézett forgásokra nézve.

Ezek után annak az elmozdulásnak megszerkesztésére térve át, a melyet a forgásoknak ebben a pontban tárgyalt két csoportja idéz elő a  $B$  ponton  $AB$  irányban, legegyszerűbbnek mutatkozik (hogy 2 kötélpoligont ne kellessen rajzolni), a képzelt erők két csoportját ugyanabban az erőpoligonban egyesíteni, két párhuzamoson rajzolva meg a szóban forgó erőpoligont. Fölveszszük tehát az erőpoligon  $b_0$  magasságát alkalmas módon (7b ábra), szerkesztünk az  $o$  ponton át a 7a ábra oldalaival párhuzamos sugarakat, s átmetszszük ezeket  $b_0$  távolságban. Erre az  $o$  pont függőlegesén fölrajuk az alább következő 6. sz. egyenletben  $\gamma_1$ -ből meghatározott képzelt erőket, magától érthetőleg  $b_0$  magasság alapján számítva ez erőket  $\gamma_1$ -ből s arra ügyelve, hogy ezt az erőpoligont a sugár ellenkező forgásban kell hogy írja le, mint a függőtartó erőtani tengelyének erőpoligonját. (Lásd a 2b szövegábrát.) S ha az ekkép megszerkesztett képzelt erőket a függőtartó csomópontjain vízszintes irányban működő erőknek tekintve, ezek kötélpoligonját megszerkesztjük, a kötélpoligon oldalait az erőpoligon sugaraira merőlegesen rajzolva, (lásd a  $c_3$  metszéket képező kötélpoligont a 7c ábrában), akkor a két szélső oldal  $c_3$  metszéke az  $AB$  vízszintes megnyújtásán a meghatározandó elmozdulást adja meg. Megjegyzendő azonban, hogy abban az esetben, ha e kötélpoligont, a mint itt föltételeztetett, nem az 1. ábra, hanem szintén az eltorzított és elfordított 2. ábra alapján szerkesztjük meg, a képzelt erőket az elmozdulás egyenesétől mért merőleges távolságok helyett az  $\eta$  metszésekkel sokszorozzuk, tehát  $\frac{a}{\cos \beta}$ -szorta nagyobb nyomatéki karokkal mint kellene. Hogy az eredmény teljes maradjon, a képzelt erőket tehát  $\frac{\cos \beta}{a}$ -val kell sokszorozni. Az 5a—5b képletek helyett ezek következtében a következők lesznek érvényesek:



$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\gamma K}{\varepsilon_1 F_0}; & \frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu &= \frac{\gamma K}{\varepsilon_2 \Sigma F} \\ K &= \frac{\varepsilon I_0 \alpha}{ab} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

hol

Az 1. rajzlapon előtüntetett esetben  $\gamma=0.75$ ;  $\Sigma F=4000$   $\text{cm}^2$ ;  $\varepsilon_1=\varepsilon_2=2000$  t. 1  $\text{cm}^2$ -re és így a 6. képlet szerint  $\gamma_1=0.0006$ ;  $\frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu=0.0004$ . Hogy pontosabban lehessen rajzolni, az itt szóban forgó  $c_3$  elmozdulás a 7c. ábrában az 5—6. ábrák léptékéhez képest 1000-szerte eltorzítva szerkesztetett meg, ( $\gamma_1=0.6$ -ra  $\frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu=0.4$ -re vétetett tehát föl), miért is  $c_3$  metszéknek csak egy ezeredrészét kell az 5. ábrában  $c_1$  és  $c_2$ -vel összegelni, (mit a fennforgó esetben az ábrában már nem lehetett kitüntetni,) megjegyzendő lévén, hogy azt, hogy  $c_3$  hozzáadassék-e  $c_1+c_2$ -hez, vagy kivonassék-e ezekből, a szerkesztés eredménye adja meg a 7c. ábrában, föltéve, hogy a 7b. erőpoligon akkép rajzoltatott meg, mint az imént mondatott.

Kitetszik ezekből egyszersmind az is, hogy a láncz és a függővasak húzó igénybevétele *forgások előidézése által* igen kis elmozdulást okoz a láncz végpontján *s hogy az eredmény akkor is elég pontos lesz, ha ezt az elmozdulást egészen elhanyagoljuk s csak azt az elmozdulást vesszük tekintetbe,* (a merevítő tartó deformációja s a horgonylánczok meghosszabbulása által okozotton kívül), *a mely a láncz meghosszabbulásából közvetlenül származik.* Erre különben más okból már előre is lehet következtetni, t. i. abból az okból, hogy a láncz és a függővasak meghosszabbulása által okozott forgások ellenkező előjelűek (lásd 7a. ábra és 2b. szövegábra) és vagy egészen egyenlőek (ha a merevítő tartó egyenes, és ha a húzó igénybevétel a lánczban ugyanaz mint a függővasakban), vagy kevésbé különböznek egymástól.

4. A függőtartó fölfüggesztő pontjának az az elmozdulása, a melyet a horgonyláncz meghosszabbulása okoz, a húzó igénybevétel következtében az átfogó irányában. Ha  $l_1$  az egyik horgonyláncz hosszúságát jelenti, (1. ábra)  $F_1$  keresztmetszeti területét,  $S$  a benne működő húzóerőt,  $\varepsilon_3$  anyagának rugalmassági modulusát,  $c'$  pedig a meghosszabbulást  $H=C$  esetre  $\nu$ -szerte eltorzítva, akkor



$$c' = l_1 \frac{\sigma}{\varepsilon_3} \nu = \frac{\nu l_1}{\varepsilon_3} \frac{S}{F_1} = \frac{\nu l_1}{\varepsilon_3 F_1} \frac{H}{\cos \varphi}$$

$$c' = \frac{l_1}{\varepsilon_3 F_1 \cos \varphi} \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{ab \cos \beta} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (6a)$$

(Az 1. rajzlapon a jobboldali hídfő horgonylánczára  $l_1 = 73$  m;  $\cos \varphi_1 = 0.80$ ;  $F_1 = 3780$  cm<sup>2</sup>;  $c'_1 = 0.218$  m, a baloldalira  $l = 56$  m;  $\cos \varphi = 0.75$ ;  $F = 4000$  cm<sup>2</sup>  $c'_2 = 0.167$  m.) A fölfüggesztő pontok elmozdulására nézve pedig két esetet kell megkülönböztetni.

a) Abban az esetben, ha az alátámasztás szerkezete olyan, hogy a függőtartó a horgonyláncz meghosszabbulása esetében átesuszhatik a horgonyláncz oldaláról a hídnylásba, azon a módon határozhatjuk meg a felfüggesztő ponton ez által az átfogó irányában okozott helyzetváltozást, mint ha a horgonyláncz hosszúsága meg nem változott volna, (s a támaszpont sem), de e helyett a függőtartó legfelsőbb  $Bk$  oldala újból meghosszabbult volna, azon a mértéken túl, a melynek befolyása főntebb a 2—3 sz. pontokban e §-ban már tekintetbe vétetett. Ha tehát a 8a. ábrában  $c'_1 = BB_1 \parallel Bk$ , a  $BB_2$  egyenes vízszintes és  $B_1B_2 \perp BB_1$ , akkor  $BB_1$  az utolsó oldal meghosszabbulása,  $B_1B_2$  az a mozgás, a melyet az utolsó  $k$  esomópont körüli forgásnak azért kell okoznia, hogy a fölfüggesztett pont a támaszpont vízszintesében maradjon, tehát  $BB_2$  az egész elmozdulás, és ha  $B_2B_3 \parallel AB$  és  $BB_3 \perp AB$ , akkor  $B_2B_3$  megadja a  $B$  ponton az  $l_1$  horgonyláncz meghosszabbulása következtében okozott elmozdulás  $AB$  irányú összetevőjét (arra az esetre, ha  $H = C$ ).\*

b) Abban az esetben, ha az alátámasztás szerkezete abban áll, hogy a horgonyláncz meghosszabbulása következtében a támaszpont vízszintes irányban a hídnylás felé mozdul el, föl-rakjuk  $c'_1$ -et a horgonylánczezal párhuzamos irányban  $BB_1 = c'_1$ -re

\* Ezt az elmozdulást akkép is meg lehet szerkeszteni, hogy a  $As$ -nek  $AB$  irányú összetevőjét a függőtartó meghosszabbulása által *közvetlenül* okozott elmozdulás többi részéhez (e §. 2. pontjában) hozzáadjuk; a  $As$ -nek függőleges összetevőjéből pedig az e §. 3. pontjában leírt módon a  $k$  pont körüli forgás által előidézett elmozdulást szerkesztjük meg, a talált képelt erőt a 7a. 7c. ábra erőpoligonjába hozva be.

(8b ábra). Ha most  $B_1B_2 \perp BB_1$  és  $BB_2$  egyenest pedig vízszintesen szerkesztjük, akkor  $BB_2$  megadja a támaszpont elmozdulását, s ha még a  $BB_3$  egyenest az  $AB$  átfogóval párhuzamosan szerkesztjük és  $B_2B_3 \perp BB_3$ , akkor  $BB_3$  megadja a  $B$  pont  $AB$  irányú elmozdulását (arra az esetre, ha  $H=C$ ).

Rendesen mind a két támaszponton okoz a horgonyláncz meghosszabbulása elmozdulást. Ki kell tehát számítani mindegyik horgonylánczra a  $c'$ -et ( $c'_1$  és  $c'_2$ ) és mind a kettőre nézve végre kell hajtani az imént magyarázott szerkesztést. Az 1. rajz-lapon ez a 8a., illetőleg a 8b. ábrákban történt meg, még pedig az 5—6. ábrákhoz képest 100-szorta nagyobb léptékben. A talált  $c_4$  hosszáságnak tehát egy századrészt kell az 5. ábrában a többi elmozdulással összegezni, még pedig oly módon, hogy  $c_1+c_2$ -vel összeadódjék. A  $c_4$  megszerkesztését illetőleg az előbbeni  $a$  pontban tárgyalt esetet ugyanis, a mint láttuk, arra vezettük vissza, mint ha a horgonyláncz nem hosszabbulna meg, hanem a helyett a függőtartó; s mint ha nem is a horgonyláncz, hanem a függőtartó utolsó oldalainak meghosszabbulása okozná az elmozdulást, a mely e szerint az  $AB$  távolság megnagyobbulásában nyilatkozik. A  $b$  esetben pedig igenis elmozdulnak a támaszpontok a horgonyláncz meghosszabbulása következtében, még pedig a hídnyílásba befelé, de, mint a *horgonyláncz* meghosszabbulása által okozottak, azok szerint, a mik erre nézve e §. elején mondatlak, ellenkező előjellel adandók a többi elmozdulásokhoz.

5. *A C súly által előidézett H reakció meghatározása.* A mint az 1—4. pontokban előrebocsátottakból kitetszik, a  $H$ -val arányos elmozdulások összege,  $H=C$  föl vétel esetében,  $c_1+c_2+c_3+c_4=c$  (5. ábra), a többi erő okozta elmozdulást a 6. ábrában mindig az a  $h$  metszék adja meg, a mely a  $C$  súly függőlegesébe esik. Az e §. elején mondottak szerint tehát a 6. ábra a  $H$  reakció influenzia-ábrája abban az erőléptékben, a melyben a  $c=c_1+c_2+c_3+c_4$  hosszáság a  $C$  súly mérőhosszasága. Ha a horgonyláncz meghosszabbulása a függőtartó végpontján sem okoz elmozdulást, vagy ha elhanyagoljuk az elmozdulás befolyását, akkor  $c_4=0$ . Ha pedig a függőtartó és a horgonyláncz meghosszabbulásának befolyását is elhanyagoljuk, akkor  $c_2+c_3$  szintén  $=0$ .



### 3. §. Más okokból keletkező külső erők megszerkesztésének általános módja.

1. Az a  $H$  reakció, a melyet a hőmérséklet megváltozása magában okoz. (És a mely tehát hozzájárul ahhoz, a melyet a mozgó teher idéz elő.) Ez erő meghatározására megint annak kell kifejezést adni, hogy a  $B$  pont  $AB$  irányú elmozdulása  $=0$ , egészen úgy, mint a  $C$  súly által előidézett  $H$  erő meghatározása alkalmával történt. Csakhogy most az elmozdulásban csak a hőmérséklet megváltozása által előidézett és továbbá a  $H$ -val arányos elmozdulások szerepelnek. Ezek összegének kell tehát zérust kitenni.

Jelöljük meg a hőmérséklet megnagyobbulását  $C^\circ$ -ban  $+\vartheta$ -val, a kiterjedési együtthatót  $\gamma$ -val, a függőtartó  $AB$  átfogója hosszúságát mint fönt  $AB=s$ -el, akkor a hőmérsékletváltozás által közvetlenül előidézett  $AB$  irányú mozgás a  $B$  ponton, alkalmasan választandó  $\nu_1$ -szeres torzításban  $t_1=\nu_1 s \gamma \vartheta$ . Azt az elmozdulást, a melyet a hőmérséklet megváltozása (a  $B$  ponton  $AB$  irányban) a függőtartó és a függővasak meghosszabbulása következtében, forgások előidézése által okoz, épp úgy szerkesztjük meg, a hogy a húzó igénybevétel által okozott meghosszabbulásra (a 7c. ábrában) szerkesztettük meg föntebb a 2. §-ban a 3. sz. pontban. (A függővasak meghosszabbulásai kiszámításában mint szorzó  $\nu_1 \gamma \vartheta \frac{\cos \beta}{a}$  szerepel. Ama képzelt erők erőpoligonjában pedig, a melyek a függőtartó meghosszabbulásának befolyását fejezik ki, az alap és a magasság közötti viszonzyszám  $=\nu_1 \gamma \vartheta \frac{\cos \beta}{a}$ ).

Legyen az e célból szerkesztendő kötélpoligon metszéke az  $AB$  vízszintesen  $=t_2$ . Végre azt a  $t_3$  elmozdulást, a melyet a horgonylánczok meghosszabbulása okoz, szintén egészen azon a módon határozzuk meg, mint föntebb a 2. §. 4. sz. pontban a húzó igénybevétel által okozott meghosszabbulásra nézve a 8a. ill. 8b. ábrákban történt. (A  $c'$  meghosszabbulás kiszámítására a szorzó  $\nu_1 \gamma \vartheta$ ). A  $B$  ponton  $AB$  irányban okozott elmozdulásban most már az a rész, a melyet a hőmérséklet megváltozása okoz  $=\frac{\nu_1 s \gamma \vartheta + t_2 + t_3}{\nu_1}$ ; az a rész pedig, melyet a  $H$  erő okoz  $=\frac{c}{\nu C} H$ .

Áll tehát, hogy

$$\frac{c}{\nu C} H + \frac{\nu_1 s \gamma \vartheta + t_2 + t_3}{\nu_1} = 0$$

a miből

$$H = - \frac{\nu_1 s \gamma \vartheta + t_2 + t_3}{\nu_1 c} \cdot \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{ab \cos \beta} \quad \dots \quad (7)$$

2. *A hídfölszerelés módjában fekvő okok által előidézett reakciók.* Az eddig tárgyalt módszerek segítségével igen könnyen meg lehet határozni azokat a reakciókat is, a melyeket esetleg az a körülmény idéz elő, ha a híd fölszerelése, a függőtartó vagy a függővasak hosszasaága, vagy a merevítő tartó erőtan tengelyének alakja, vagy a támaszpontok viszonylagos helyzete tekintetében nem pontos; vagy ha külön reakciók szándékos előidézése végett készítettnek el a hídrészek oly módon, hogy eltérések mutatkozzanak a hídban, a főntemlített egyik vagy másik tekintetben, a mértani összefüggéshez képest; magától érthető lévén, hogy ez eltéréseknek nem szabad nagyobbaknak lenni, mint a mennyit a rugalmas deformáció által okozott alakváltozások is tehetnek még.

Azt p. o., hogy a merevítő tartón ne keletkezzék nemleges reakció, (hogy tehát végeit ne kelljen a támaszpontokon lecsavarolni), az által lehet elérni, hogy akkép szereltetjük föl a hidat, hogy *fölszerelés módja következtében* bizonyos előre kijelölt nemleges  $H$  reakció keletkezzék a függőtartón, s ennek következtében megfelelő tevőleges reakciók a merevítő tartón. Mellözve e helyen az e pontban épp főlemlített többi föladatot, tárgyalassék jelenleg még csak az az eset, ha abból az okból, hogy a merevítő tartón mindig tevőleges reakciók keletkezzenek, a *függővasak* hosszabbíttatnak meg a híd fölszerelése alatt, még pedig (erőtani czélszerűség és könnyű kivihetőség szempontjából) akkép, hogy a meghosszabbítások a függőtartó és átfogója közötti függőleges  $y$  metszékek  $\delta$ -sorosai, tehát az  $y$ -okkal arányosak legyenek. A függővasak meghosszabbulásainak ábrája ez esetben teljesen oly alakú fog lenni, mint a milyennek a 2. §-ban a 2. sz. pontban a *függőtartó* meghosszabbulásából keletkező függőleges mozgások ábráját tételeztük fel. Ez okból a képzelt erők erőpoligonját is egészen ugyanazon a módon lehet megszerkeszteni, csak hogy a torzítás szorzóját  $\nu_1$ -et alkalmas módon *föl kell venni*, és hogy,



ha a kötélpoligont az 1. ábra helyett az eltorzított 2. ábra alapján óhajtjuk megszerkeszteni, az alap és a magasság közötti viszonyszám  $\gamma \partial \nu_1 \frac{\cos \beta}{a}$  fog lenni. Ha az ekkép meghatározott képzelte erőket a függőtartó csomópontjain működő vízszintes erőknek véve föl, kötélpoligonjukat a 2. ábra alapján megszerkesztjük s ennek metszékét az  $AB$  vízszintes meghosszabbításán  $q$ -val jelöljük meg, akkor a  $B$  pont  $AB$  irányú elmozdulásában  $\frac{q}{\nu_1}$  az a rész, a melyet a függővasak meghosszabbítása okoz,  $\frac{c}{C\nu}$   $H$  az a rész, a melyet a  $H$  erő idéz elő, és így

$$\frac{q}{\nu_1} + \frac{c}{C\nu} H = 0$$

a miből, tekintve hogy  $\nu = \frac{\varepsilon I_0 a^2}{ab \cos \beta}$  (lásd 3b. képlet),

$$H = \frac{q}{\nu_1 c} \frac{\varepsilon I_0 a^2}{ab \cos \beta} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (8)$$

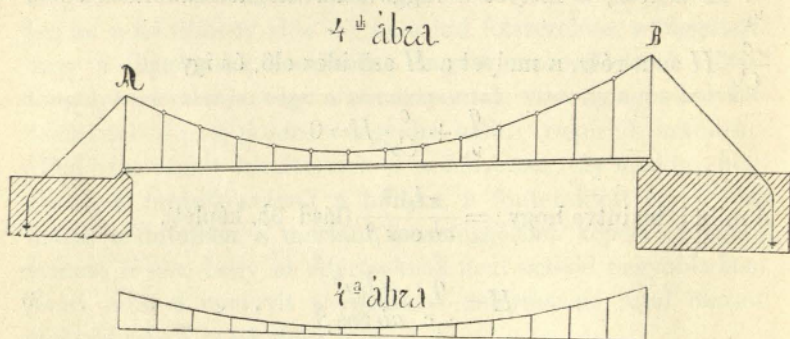
#### 4. §. Számítási módszer.

Vezessük le a következőkben a függőtartó reakciója vízszintes összetevőjének képletét arra az esetre, ha a hid csak az egy  $G$  súlylyal van megterhelve a következő föltételek alatt. Tegyük ugyanis föl a gyakorlati alkalmazásra tekintettel, hogy a függőtartó erőtan tengelyét parabolának lehet tekinteni, hogy a merevítő tartó egyenes és hasábalakú (vagy közelítőleg ilyennek tekinthető) és hogy a méretezés olyan, hogy a húzó igénybevétel valamennyi függővasban ugyanaz s az egész függőtartó hosszában is állandó. (4. ábra.)

Számítsuk ki a 2. §-ban is megkülönböztetett részeket a  $B$  pont  $AB$  irányú mozgásában, itt is külön-külön egyenként.

1. Azt az elmozdulást, a melyet a merevítő tartó meghajlása okoz, a mint a 2. §. 1. sz. pontjában láttuk, egészen úgy számíthatjuk ki, mint ha merev lenne a függőtartó, csak hogy  $\varepsilon ds$  és  $I$  alatt a merevítő tartó e mennyiségeit kell érteni. Mint-hogy pedig az egyes keresztmetszetekre jobbról 3 külső erő hat

(t. i. a  $H$  erő, a  $G$  súly és a jobb oldali függőleges reakció  $B$ ), e 3 külső erő mindegyikére külön-külön fogjuk az elmozdulást kiszámítani, mindegyik részt mint az állandókkal szorozott  $\int$ -ét a  $s \frac{dx}{\cos a}$  képzelt erők centrifugális nyomatékainak ama 2 tengelyre nézve, melyek egyikét az erő irányvonala, másikat az  $AB$  elmozdulási egyenes adja meg, megjegyzendő lévén az  $AB$  tengelyt illetőleg, hogy a merőleges távolságok helyett a függő-



leges  $y$  ordinátákat lehet a számításba bevezetni. (2a—2b képletek.)

Ezek szerint tehát a szóban forgó mozgásnak az a  $\Delta e_1$  része, a melyet a  $H$  erő okoz (lásd a 4. ábrát):

$$\Delta e_1 = \frac{H \cos \beta}{\varepsilon I \cos a} \int_{-l}^{+l} y^2 dx$$

az a része, a melyet a függőleges  $B$  reakció okoz

$$\Delta e_2 = - \frac{B \cos \beta}{\varepsilon I \cos a} \int_{-l}^{+l} xy dx$$

végre az a része, a melyet a  $G$  súly idéz elő

$$\Delta e_3 = \frac{G \cos \beta}{\varepsilon I \cos a} \int_{-l}^{x_1} (x_1 - x) y dx.$$



A függőtartó erőtani tengelyét képező parabola egyenlete:

$$y=f(1-\frac{x^2}{l^2})$$

a függőleges  $B$  reakció képlete pedig:

$$B=G\frac{l+x_1}{2l}.$$

Ha ezeket a  $\Delta e_1$ ,  $\Delta e_2$ ,  $\Delta e$  képletekbe helyettesítjük s az egészleteket kiszámítjuk, a következő eredményeket nyerjük:

$$\Delta e_1=H\frac{16lf^2\cos\beta}{15\varepsilon I\cos\alpha};$$

$$\Delta e_2=-G\frac{2l(l+x_1)f\cos\beta}{3\varepsilon I\cos\alpha};$$

$$\Delta e_3=G(\frac{1}{4}fl^2+\frac{2}{3}x_1fl+\frac{1}{2}x_1^2f-\frac{1}{12}\frac{x_1^4f}{l^2})\frac{\cos\beta}{\varepsilon I\cos\alpha}$$

2. Az a  $\Delta e_4$  elmozdulás, a melyet a függőtartó meghosszabbulása közvetlenül idéz elő, a húzó igénybevétel következtében:

$$\Delta e_4=\frac{2l}{\cos\beta}\frac{\sigma}{\varepsilon_1}=H\frac{2l}{\varepsilon_1F_0\cos\beta}$$

hol  $\varepsilon_1$  és  $F_0$  ugyanazt jelenti, mint a 4. egyenletben.

3. Az az elmozdulás, a melyet a húzó igénybevétel következtében a függőtartó és a függővasak meghosszabbulása forgások előidézése által okoz. A szóban levő forgások által létrehozandó *függőleges* irányú elmozdulások vonalait elégséges pontossággal paraboláknak tekinthetjük. (Ezeket burkoló kötél-polygonok helyett.) A képzelt erők ekkor egyenletesen elosztottak gyanánt fognak szerepelni. A 4a. ábra a függővasak meghosszabbulása folytán a függőtartón is bekövetkező függőleges elmozdulások ábrájának alakját mutatja, akkép, mint ha a  $h_1$ ,  $h_2$  pilonok is épen azon a módon hosszabbulnának meg, mint a függővasak. Azt, hogy ez tényleg nem történik meg, vegyük mindenekelőtt az által tekintetbe, hogy a szélső  $k_1$  és  $k_2$  csomópontokon oly forgásokat veszünk föl, a melyek következtében

az  $A$  és  $B$  pontok  $\Delta h_1$  és  $\Delta h_2$ -vel mozdulnak el függőlegesen lefelé, tehát az  $AB$  irányban

$$\frac{\Delta h_1}{d_1} y_1 \cos \beta = \Delta h_1 \cos \beta \frac{2f}{l}; \quad \text{és} \quad \Delta h_2 \cos \beta \frac{2f}{l}$$

menntiségekkel kifelé. Az  $AB$  távolság megnagyobbulása e két forgás következtében tehát

$$\Delta e_5 = \frac{2f \cos \beta}{l} (\Delta h_1 + \Delta h_2).$$

Itt azonban jelzés nélkül

$$\Delta h = h \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{hR}{\varepsilon_2 \Sigma F} = H \frac{4fh}{\varepsilon_2 l \Sigma F}$$

és így

$$\Delta e_5 = H \frac{8f^2(h_1 + h_2) \cos \beta}{\varepsilon_2 l^2 \Sigma F}.$$

Ha továbbá a fentemlített egyenletesen eloszlott képelt erők erőpoligonjaiban az alap és a magasság közötti viszony-számot, egyrészt a függőtartó, másrészt a függővasak meghosszabbulása folytán keletkező forgások által okozott elmozdulások kiszámítására  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$ -vel jelöljük meg,  $\gamma_{12}$ -vel pedig a hasonló viszonyszámot abban az erőpoligonban, a mely a képelt erők e két csoportjának összegelése által keletkezik, akkor (tekintve hogy e viszonyszám a függőtartó erőtani nézetéhez tartozó erőpoligonban  $\frac{4f}{l}$ -et tesz ki)

$$\gamma_1 = \frac{4f}{l} \frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{4fH}{\varepsilon_1 l F_0}$$

$$\gamma_2 = \frac{4f}{l} \frac{\sigma}{\varepsilon_2} = \frac{4fR}{\varepsilon_2 l \Sigma F} = \frac{16f^2 H}{\varepsilon_2 l^2 \Sigma F}$$

$$\gamma_{12} = H \frac{4f}{l} \left( \frac{1}{\varepsilon_1 F_0} - \frac{4f}{\varepsilon_2 l \Sigma F} \right).$$

Ha tehát  $dx$  jelöljük meg e képelt erők összegét a függőtartó végtelen rövid elemén, akkor



$$dz = \frac{r_{12}}{2l} dx$$

következésképen az az elmozdulás, a melyet az itt tárgyalt for-  
gások idéznek elő

$$\Delta e_6 = \cos \beta \int_{-l}^{+l} y dx = \frac{r_{12} \cos \beta}{2l} \int_{-l}^{+l} y dx = \frac{2}{3} r_{12} f \cos \beta$$

$$\Delta e_6 = H \frac{8f^2}{3l} \left( \frac{1}{\varepsilon_1 F_0} - \frac{4f}{\varepsilon_2 l \Sigma F} \right) \cos \beta.$$

4. Az az elmozdulás, a melyet a horgonylánczok meghosszabbulása okoz, a húzó igénybevétel következtében. (*B* ponton *AB* irányban.) Ha  $l_1$ ;  $S$ ;  $\varepsilon_3$ ;  $F_1$  ugyanazt jelentik, mint a 2. §. 4. sz. pontjában és ha a horgonyláncz meghosszabbulását  $\Delta l_1$ -el jelöljük meg, akkor

$$\Delta l_1 = l_1 \frac{\sigma}{\varepsilon_3} = \frac{l_1 S}{\varepsilon_3 F_1}.$$

Ha fölteszszük, hogy a horgonyláncz ugyanabból az anyagból áll, mint a függőtartó, akkor  $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$  és föltehető, hogy a méretezés következtében  $\frac{S}{F_1} = \frac{H}{F_0}$ , tehát

$$\Delta l_1 = \frac{l_1 H}{\varepsilon_1 F_0}$$

az ez által okozott elmozdulás pedig a *B* ponton *AB* irányban azok szerint, a melyek a 2. §. 4. sz. pontjában mondottak és az 1. rajzlapon a 8a illet. a 8b ábrákban megszerkesztettek

$$\Delta e_7 = H \frac{k \cos \beta}{\varepsilon_1 F_0}, \text{ hol}$$

a 8a ábra esetében

$$k = \frac{l_1}{\cos \varphi_1} + \frac{l_2}{\cos \varphi_2}$$

a 8b ábra esetében

$$k = \frac{l_1}{\cos \varphi_1} + \frac{l_2}{\cos \varphi_2}.$$

A függőtartó reakciójának  $H$  összetevőjét már most, egészen úgy mint a mértani tárgyalásban, abból a föltételből határozzuk meg, hogy mindezek elmozdulások összegének zérust kell tenni, vagyis hogy

$$\Sigma \Delta e = 0.$$

Ha itt  $\Delta e_1$  egész  $\Delta e_7$ -ből helyettesítünk,  $x_1$  helyett  $x_1 = \xi l$ -et írunk és kellőképen egyszerűsítünk, akkor a következő egyenletet nyerjük a  $H$  ismeretlen meghatározására:

$$H = \frac{5}{64} (1 - \xi^2)(5 - \xi^2) \frac{l}{f} \frac{G}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

a melyben

$$\begin{aligned} \mu = 1 + \frac{5\varepsilon I \cos a}{16l^2 f^2} & \left[ \frac{6l^2 + (8f^2 + 3lk) \cos^2 \beta}{\varepsilon_1 F_0 \cos^2 \beta} + \right. \\ & \left. + \frac{24f^2(h_1 + h_2) - 32f^3}{\varepsilon_2 l \Sigma F} \right] \quad . \quad . \quad . \quad (9a) \end{aligned}$$

Ha a fölfüggesztő pontok egyenlő magasságban vannak elhelyezve ( $\beta = 0$ ), a merevítő tartó vízszintes ( $a = 0$ ) és ha

$$h_1 = h_2 = f,$$

akkor

$$\mu = 1 + \frac{5\varepsilon I}{16l^2 f^2} \left[ \frac{6l^2 + 8f^2 + 3lk}{\varepsilon_1 F_0} + \frac{16f^3}{\varepsilon_2 l \Sigma F} \right] \quad . \quad . \quad (9b)$$

A 9. sz. képlet, a mint látjuk, alakra nézve tökéletesen azonos az ívek és merev függőtartók vízszintes reakciójának ama képletével, a melyben az abszolút igénybevétel befolyása is megközelítő módon tekintetbe van véve. Csak a  $\mu$  együttható tesz ki néhány %-kal többet, miután azon tagon kívül, a mely az ívek alapképletében szintén szerepel, még más tagokat is foglal magában. Megjegyzendő, hogy a 9. sz. képlet abban az esetben is érvényes, ha a merevítő tartó erőtan tengelye *nem* egyenes, ha csak a  $I \frac{dx}{ds} = I_0$  állandónak vehető föl,\* csakis a  $\mu$

\* Ismeretes, hogy az ívek elméletében is állandónak vették föl rendszeren a  $I \frac{dx}{ds}$ . A merevítő tartókon ugyan tágabb határok között vál-



együttható képletében változik meg a  $\Sigma F$ -et magában foglaló tag ez esetben, mit, ha szükségesnek mutatkozik, nehézség nélkül tekintetbe lehet venni.

A merevítő tartóval felszerelt hajlékony függőtartók és a merev függőtartók (és ívek) vízszintes reakcióinak képletei között itt talált megegyezésnek az oka abban keresendő, hogy a hajlékony függőtartó deformációjának legnagyobb részét a merevítő tartó meghajlása idézi elő és hogy ez a deformáció tökéletesen olyan, mint ha merev lenne a függőtartó s mint ha a  $\frac{ds}{\varepsilon I}$  e merev függőtartón oly nagy lenne, mint a milyen tényleg a merevítő tartón. (Lásd erre nézve a 2. §. 1. pontban levezetett tételeket.)

### 5. §. A hőmérséklet változása okozta reakció kiszámítása.

Tegyük föl, mint a 4. §-ban, hogy a függőtartó erőtani tengelyét parabolának lehet tekinteni, a merevítő tartó pedig hasábalakú és egyenes (4. ábra). A hőmérséklet megnagyobbulása  $C^\circ$ -okban kifejezve legyen ismét  $+\theta$ , a kiterjedés együtthatója pedig  $\gamma$ .

A kiindulási elv föntebb a hőmérsékletváltozás által előidézett  $H$  erő megszerkesztésének tárgyalása alkalmával (3. §. 1. sz. pont) már ki volt mondva: A  $H$  erővel arányos elmozdulások összege a  $B$  ponton  $AB$  irányban, hozzáadva ehhez a hőmérsékletváltozás által okozott elmozdulások összegét, zérust kell hogy tegyen.

A  $H$ -val arányos elmozdulások ( $\Delta e_1$  és  $\Delta e_{4-7}$ ) az előbbeni §-ban számítottak ki.

A hőmérsékletváltozás által előidézett elmozdulást pedig a következő módon határozhatjuk meg:

1. A függőtartó meghosszabbulása által közvetlenül előidézett  $\Delta l_1$  elmozdulás

---

tozik e mennyiség, mint az íveken; az a fölvétel azonban, hogy  $I \frac{dx}{ds} = \text{const.}$ , mégis a merevítő tartók elméletében is közel ugyanoly pontos fog rendesen lenni, mint az, hogy  $I = \text{const.}$

$$\Delta t_1 = \frac{2l}{\cos \beta} \vartheta \gamma.$$

2. Az az elmozdulás, a melyet a függőtartó és a függővasak meghosszabbulása *forgások* előidézése által okoz. Itt az a rész, a melyet a  $k_1$  és  $k_2$  szélső csomópontok körül bekövetkező, a 4. §. 3. sz. pontja elején is számításba hozott *külön* forgások okoznak (4—4a szövegábra)

$$\Delta t_2 = \frac{h_1 \gamma \vartheta}{d_1} y_1 \cos \beta + \frac{h_2 \gamma \vartheta}{d_2} y_2 \cos \beta$$

$$\Delta t_2 = \gamma \vartheta \cos \beta \frac{2f}{l} (h_1 + h_2).$$

Egyéb forgások a csomópontokon a hőmérséklet megváltozása folytán nem következnek be. Mert ha megtartjuk a 4. §. 3. sz. pontjának jelzését, akkor, azon alapon, a mint ott levezettetett

$$\gamma_1 = \frac{4f}{l} \gamma \vartheta; \quad \gamma_2 = \frac{4f}{l} \gamma \vartheta;$$

tehát

$$\gamma_{12} = 0; \quad dx = 0.$$

3. Az a  $\Delta t_3$  elmozdulás, a melyet a horgonylánczok meghosszabbulása okoz. Erre nézve egy-egy horgonyláncz meghosszabbulása

$$\Delta l_1 = l_1 \gamma \vartheta,$$

tehát a 4. §. 4. sz. pontjában mondtak szerint

$$\Delta t_3 = \gamma \vartheta k \cos \beta,$$

hol  $k$  értéke ugyanaz, mint a 4. §. épp idézett 4. számú pontjában.

Ha már most a

$$\Delta e_1 + \Delta e_{4-7} + \Delta t_{1-3} = 0$$

egyenletbe a  $\Delta e$ -ékre a 4. §-ban talált, a  $\Delta t$ -ékre pedig az imént levezetett értékeket behelyettesítjük, akkor a keresett  $H$  erőnek meghatározására a következő egyenletet nyerjük:



$$H = \frac{15\varepsilon I \cos \alpha}{16lf^2 \cos \beta} \frac{\Delta t}{\mu}$$

a melyben

$$\Delta t = \Delta t_{1-3} = \gamma \delta \left( \frac{2l}{\cos \beta} + \frac{2f(h_1 + h_2) \cos \beta}{l} + k \cos \beta \right)$$

$\mu$  pedig ugyanazt jelenti, mint a  $9a-9b$  egyenletekben.

## II. RÉSZ.

Az az eset, ha az elméleti hidnyílás a lánczon nagyobb, mint a merevítő tartón.

### 1. §. A $C$ súly okozta $H$ reakció megszerkesztése.

Az I. rész 1. §. és 2. §. 1. pontban mondottak szerint ebben az esetben is áll az, hogy azt az elmozdulást, a melyet a függőtartó  $B$  végpontján az  $AB$  irányban a merevítő tartó meghajlása okoz, tökéletesen ugyanazon a módon határozhatjuk meg, mint ha *mercv* lenne a függőtartó  $a_1$  és  $b_1$  között (1. szöveg ábra) és mint ha az anyag rugalmassági modulusa  $\varepsilon$ , a keresztmetszetek tehetetlenségi nyomatéka  $I$  és az ívelemek hosszúsága  $\Delta s$  e *mercv*nek képzelt függőtartón épp oly nagy lenne, mint a milyen tényleg a hajlékony függőtartó merevítő tartóján. A különbség az I. részben találtakhoz képest tehát csak abban fog állani, hogy a  $B$  pont ama  $AB$  irányú elmozdulására, a melyet a merevítő tartó meghajlása okoz, a merevítő tartó  $ab$  támaszpontjai körüli forgásoknak is lesz befolyásuk. (Míg a 2. szövegábra esetében nem volt, mert ebben az ábrában az  $A$  ponton képzelt erőnek az  $AB$  egyenesre nézve nincsen nyomatéka.) Meg kell tehát majd határozni az  $a$  és  $b$  pontok körüli forgások szögeit is s a merevítő tartó meghajlásának befolyását kifejező többi képzelt erőn kívül, eme szögek mértékeit is erők gyanánt kellend fölvennünk, még pedig (azokra tekintettel, a mik az I. rész 2. §. 1. sz. pont elején a  $k$  keresztmetszet forgása által a függőtartón okozott deformációra nézve mondattak), az  $a$  szög mértékét a  $a_1$  ponton, a  $b$  szöget pedig  $b_1$  ponton.

Egyébiránt pedig ismét a függőtartó reakciójának vízszintes összetevője  $H$  az ismeretlen s ennek meghatározására a föl-

tétel ismét az, hogy a  $B$  pont  $AB$  irányú összes elmozdulása zérust tesz, föltéve, hogy az összegbe a horgonyláncz meghosszabbulása által okozott elmozdulást is beszámítjuk, még pedig az ellenkezőre megváltoztatott előjellel. Ez okból ismét meg kell szerkeszteni a  $B$  pont főntemlített elmozdulásának mindazokat az egyes részeit, a melyek az I. rész 2. §-ban voltak felsorolva. Abban az esetben, ha csak az egy  $C$  súlylyal van a hid megterhelve, ez a következő módon történhetik meg: (Lásd a 2. rajzlapot.)

1a) Az az elmozdulás a  $B$  ponton  $AB$  irányban, a melyet a  $H=C$  erő okoz a merevítő tartó meghajlása következtében, abban az esetben, ha a tartó tömör. Megszerkesztjük az erőteni tengely eltorzított vetületét külön az egész  $AB$  függőtartóra (2b ábra) és megint külön ennek  $a_1$   $b_1$  részére (2a ábra) akkép, hogy a 2b ábrában az  $AB$  vonal, a 2b ábrában a  $a_1$   $b_1$  vonal vízszintes legyen, és hogy a függőleges ordináták mind a kettőben  $a=4$ -szerte nagyobb léptékben legyenek rajzolva, mint a vízszintes méretek. Erre beosztjuk a függőtartó erőteni tengelyét elemekre s kiszámítjuk ez elemekre  $\frac{\Delta s}{\tau}$  képzelt erőket, a  $\Delta s$ -eket

és a  $\tau$ -okat a függőtartó minden elemére nézve a függőlegesen alatta a merevítő tartó elemén szereplő méretek alapján helyettesítve be. (A 2. rajzlapon  $I$  4000 és 8000  $\text{m}^2 \text{cm}^2$  között változóra,  $I_0=2200 \text{m}^2 \text{cm}^2$ -re,  $a=75 \text{m}$ ;  $b=100 \text{m}$ -re vétetett föl).

E  $\frac{\Delta s}{\tau}$  erőket a 2a ábrában az illető elemek középpontjain át működő vízszintes erőknek tekintve, megszerkesztjük ezek erő- és kötélpoligonját (3 és 4a ábra) és a kötélpoligon oldalait megnyujtva, ezek  $\Delta k_1$  metszékeit az  $a_1$   $b_1$  vízszintes megnyújtásán. (Az erőháromszög magassága  $=a$ , miért is a csúcspont  $a$ -val van megjelölve.) E  $\Delta k_1$  metszékek mint a  $\frac{\Delta s}{\tau}$ -ok sztatikai nyomatókai, az egyes keresztmetszeteken a  $H=C$  erő által előidézett forgások szögeinek mérő hosszúságait adják.

Most e  $\Delta k_1$  szögmértékeket függőleges erőknek tekintve az elemek középpontjain, megszerkesztjük ezek kötélpoligonját (4c ábra). Ha e kötélpoligon átfogójára a 4a ábrában az erőpoligonnak az imént fölvett  $b$  csúcspontján át merőlegeset szerkesztünk,



akkor az a két metszék, a melyre ez a  $\Delta k_1$  erőháromszög alapját fölbontja, a merevítő tartó  $a$  és  $b$  támaszpontjain a  $H=C$  erő okozta forgások szögeinek mértékeit adja meg. És ha végre az ezek által kiegészített  $\Delta k_1$  erőket a  $2b$  ábrában az  $a_1$  és  $b_1$  pontokon s az elemek középpontjain át működő vízszintes erőknek tekintve, kötélpoligonjukat megrajzoljuk (5. ábra), úgy ebben a szélső oldalak  $c_1$  metszéke az  $AB$  vízszintes megnyújtásán, mint a  $\frac{\Delta s}{\tau}$ -ok centrifugális nyomatéka a  $a_1$   $b_1$  és  $AB$  egyenesekre nézve megadja a keresett elmozdulást.

1b) Az az elmozdulás, a melyet a  $C$  súly és az ez által a merevítő tartón okozott függőleges reakciók idéznek elő a függő-tartó  $B$  pontján  $AB$  irányban, a (tömör) merevítő tartó deformációja következtében. A  $\frac{\Delta s}{\tau}$ -okat, (a melyeknek a magasságú erőháromszöge a 3. ábrában már előbb megrajzoltatott,) a  $2b$  ábrában az elemek középpontjain átmenő vízszintes erőknek tekintve, megszerkesztjük ezek kötélpoligonját (4b ábra) s meghosszabbítva ennek oldalait, a  $\Delta k_2$  metszékeket az  $AB$  vízszintesen. Erre e  $\Delta k_2$  metszékeket az elemek középpontjain átmenő függőleges erőknek tekintve, s az erőháromszög magasságát  $b_1 = \frac{b}{a}$ -ra véve föl, megszerkesztjük a függőlegeseknek fölvett e  $\Delta k_2$  képzelt erők  $\Delta k_2$  kötélpoligonját. (6. ábra.) Az I. rész 2. §. 1. sz. pontban mondottak szerint akkor az a  $h_1$  metszék, a melyet e kötélpoligon és átfogója a  $C$  súly függőlegesen képez, már megadja a keresett elmozdulásnak azt a részét, a melyet a merevítő tartó  $a$  és  $b$  közötti elemeinek elhajlása okoz, nem számítva az  $a$  és  $b$  támaszpontok körüli forgások befolyását.

A  $h_1$  metszékekből tehát levonandó még az a mozgás, a melyet az  $a$  és  $b$  támaszpontok körüli forgások idéznek elő. E forgások szögeinek meghatározására az elemek középpontjain átmenő függőleges erőknek tekintjük a  $\frac{\Delta s}{\tau}$ -okat, megrajzoljuk ezek kötélpoligonját (9b ábra), megszerkesztjük a kötélpoligon oldalainak megnyújtása által a  $b_1$  függőlegesen a  $\Delta k_3$  metszékeket s ezeket új függőleges erőknek tekintve, megrajzoljuk ezek kötélpoligonját (10b ábra).

Legyen a forgási szög mérő hosszúsága az  $a$  ponton  $k_a$ -val, a  $b$  ponton  $k_b$ -vel megjelölve, a kettő összege  $k_a + k_b$  pedig  $k_0$ -val. Akkor a 9b ábrában  $u = k_0$ . (Ugyanis  $u_1$  az a forgás, a melyet a  $C$  súly okoz a  $b$  lapon, ha a tartó  $a$ -nál be van falazva, a  $\Sigma M_{k_3}$  metszék az a forgás, a melyet  $B = C$  függőleges reakció okozna, tehát  $u_2$  az a forgás, a melyet a tényleges  $B$  reakció okoz). A 10b ábrában pedig  $v$  az a függőleges elmozdulás, a melyet a  $C$  súly és a függőleges  $B$  reakció a  $b$  ponton okoznak, ha e tartó  $a$ -nál be van falazva, miért is  $k_a = v \frac{b}{2l}$ .

Akkép is végre lehet hajtani a 9b és 10b ábrák megszerkesztését, hogy az  $u$  és  $v$  metszések összege közvetlenül a  $k_a$  és  $k_b$  forgások által előidézett  $e$  elmozdulást adja meg. Ha ugyanis egyelőre eltekintünk a  $y$  metszések eltorzításától, akkor

$$e = \frac{y_1 k_a + y_2 (k_0 - k_a)}{b} = e_1 + e_2$$

hol

$$e_1 = \frac{k_0 y_2}{b} = u \frac{y_2}{b}$$

$$e_2 = \frac{k_a (y_1 - y_2)}{b} = v \frac{y_1 - y_2}{2l}$$

Ha az  $u$  metszékét  $\frac{y_2}{b}$ -vel, a  $v$  metszékét pedig  $\frac{y_1 - y_2}{2l}$ -vel sokszorozva szerkesztjük meg, akkor tehát az  $u$  az  $e_1$ -et, a  $v$  pedig az  $e_2$ -öt fogja megadni. Ezt azonban, (tekintve, hogy kötélpoligon-ordinátákat sokszorozott értékben megszerkeszteni vagy az által lehet, ha az erőket sokszorozzuk, vagy az által, hogy az erőháromszög magasságát elosztjuk az illető számmal,) a fenforgó esetben legegyszerűbben és legpontosabban az által lehet elérni, ha a 9b ábra megszerkesztésére az erőpoligonban az  $a$  magasságot megtartjuk, a  $\frac{\Delta s}{\tau}$  erőket pedig, megfelelő irányban átvetítve erőpoligonjukat a 3. ábrából a 9a ábra függőlegesére, ez átvetítés által  $\frac{a^2 y_2}{b}$ -vel megsokszorozzuk. ( $a^2$ -tel azért, hogy az eltorzítás léptéke ugyanaz legyen, mint az 5—6. ábrák-



ban, t. i.  $v = \frac{\varepsilon I_0 a^2}{abC \cos \beta}$ .) A 10b ábra megszerkesztésére pedig a  $\Delta k_3$  erőpoligonban a  $b$  helyett

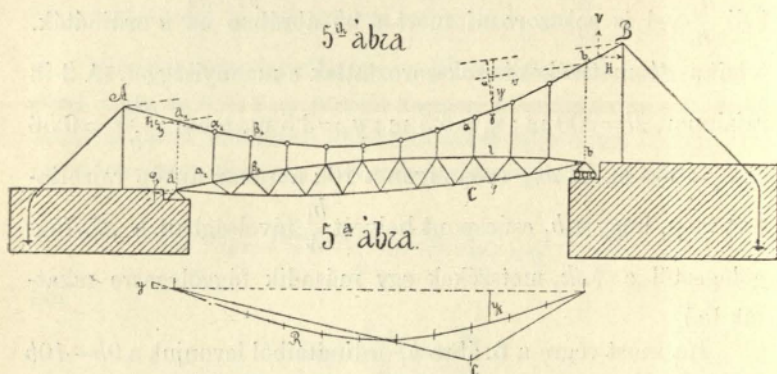
$$b_1 = b \frac{y_2}{b} \frac{2l}{y_1 - y_2} = 2l \frac{y_2}{y_1 - y_2}$$

magasságot veszünk föl. (Itt a  $b$  magasságot  $\frac{2l}{y_1 - y_2}$ -önkívül azért kell  $\frac{y_2}{b}$ -vel is sokszorozni, mert a 9b ábrában az  $u$  ordináták, tehát a  $\Delta k_3$  metszékek is sokszoroztattak e mennyiséggel. (A 2-ik rajzlapon  $2l = 200$  m;  $y_1 = 5.5$  m;  $y_2 = 3.5$  m, tehát  $\frac{a^2 y_2}{b} = 0.56$  és  $b_1 = 350$  m. A  $\Delta k_3$  erőpoligon a 10a ábrában akképp rajzoltattott meg, hogy a  $b_1$  csúspont helyett  $\frac{b_1}{4}$  távolságban a  $\Delta k_3$  függőlegestől a  $\frac{3}{4} \Delta k_2$  metszékek egy második függőlegesre rakattak le.)

Ha most végre a 6. ábra  $h_1$  ordinátáiból levonjuk a 9b—10b ábrákban imént megszerkesztett  $u$  és  $v$  ordinátákat (ha  $y_1 - y_2$  nemleges, akkor a  $v$  metszékeket össze kell adni a  $h_1$  metszékekkel), akkor a fentebb mondottak szerint az ez által talált  $h$  ordináták megadják az e pontban keresett azt az elmozdulást, a melyet a  $C$  súly s az ez által okozott függőleges reakciók idéznek elő a függőtartó  $B$  pontján  $AB$  irányban.

1c. *A láncz végpontjának az az elmozdulása, (az átfogó irányában), a melyet a merevítő tartó deformációja abban az esetben okoz, ha e tartó rácsos.* Ha a merevítő tartó  $l$  rúdjának hosszasága külső erők működése következtében megváltozik, akkor az ez által a tartó következő részén előidézett forgás középpontja e rúd  $\varphi$  főpontja (5. ábra). Az I. R. 2. §. 1. pontban mondottak szerint azonban ez esetben sem kell meghatározni, hogy mily forgások keletkeznek ennek következtében a lánczon a szomszédos  $\alpha$   $\beta$  csomópontokon, hanem úgy tekinthetjük a láncz deformációját, mint ha a merevítő tartón a  $\varphi$  pont körül beállott  $\Delta x$  forgás következtében, a lánczon a  $\varphi$  pont függőlegesében levő  $\gamma$  ponton ugyanoly forgás állana be. És ez áll nem csak a két öv minden szakaszára, hanem mindegyik rácsrúdra is. Ha az  $l$  rácsrúd hossza

megváltozik, akkor a merevítő tartó következő része a  $\varphi_1$  főpont körül forog; ennek következtében a függőtartón az  $a_1 \beta_1$  csomópontokon forgások állanak be; de megint úgy tekinthetjük, mint ha nem  $a_1 \beta_1$  pontok körül forogna a láncz következő része, hanem a  $\varphi_1$  főpont függőlegesében az  $a_1 \beta_1$  egyenes meghosszabbításán levő  $\gamma_1$  ponton, még pedig ugyanoly szög alatt, mint a merevítő tartó a  $\varphi_1$  pont körül.



Ha másrészt oly erőháromszög alapján gondoljuk a merevítő tartóra ható külső erők kötélvonalát megszerkesztve, (5a. ábra), a melyben a magasság az ismeretlen  $H$  reakcióval egyenlő, akkor, amint már az I. R. 1. §-ban konstatáltatott, az  $y$  függőleges metszések a reakciók kötélpoligonján ugyanazok, mint az ugyanazokban a függőlegesekben a lánczon az  $a b$  pontok fölvetítése által megszerkesztett  $a_1 b_1$  átfogóig mért ordináták. És ez is nemcsak az övek főpontjainak függőlegeseire áll, hanem áll a rácsrúdakra is. Ezekre is ugyanaz az  $y$  ordináta a  $\varphi_1$  főpont függőlegesében, akár a függővas-reakciók kötélpoligonjában határozzuk meg, akár a láncz erőtani nézetében. A  $H$  reakciótól függő nyomatóéket illetőleg az  $y$  szorzó, a mint ezekből látjuk, valamint az övekre úgy a rácsrúdakra nézve is, a lánczvonala pontjának ordinátája, a mely a merevítő tartó illető rúdja főpontjának függőlegesében van, s a melyet az imént mondottak szerint a szóban forgó rúd hosszváltozása által a lánczon előidézett forgás középpontjának is tekinthetünk.



A függőtartó  $B$  végpontjának az az  $AB$  irányú  $\Delta e_1$  elmozdulása tehát, a melyet a  $H$ -val arányos erők idéznek elő a merevítő tartó valamely rúdja hosszának megváltoztatása által, ha  $H=C$

$$\Delta e_1 = \frac{Hyl}{\varepsilon F d^2} u = \frac{Cl \cos \beta}{\varepsilon F d^2} vy$$

az az elmozdulása pedig, a melyet  $C$  nagyságú valamely *függőleges* erő idéz elő ugyane módon, ha  $x$  az erő forgató karja a szóban forgó rúd főpontjára nézve,

$$\Delta e_2 = \frac{Cxl}{\varepsilon F d^2} u = \frac{Cl \cos \beta}{\varepsilon F d^2} vx$$

hol  $l$  a rúd hossza,  $F$  keresztmetszetének területe,  $d$  a főpontjától mért távolsága. Az eltorzított elmozdulások tehát, ha az  $y$  és  $v$  ordinátákat is  $\alpha$ -szorta eltorzított ábrákban szerkesztjük meg, (úgy mint a tömör tartó esetében is történt):

$$\Delta e_1 = \left(\frac{l}{\tau}\right) \frac{vy}{ab}; \quad \Delta e_2 = \left(\frac{l}{\tau}\right) \frac{vx}{ab_1}$$

a torzítás szorzója pedig

$$\nu = \frac{\varepsilon I_0 \alpha^2}{abC \cos \beta}$$

hol  $\tau = \frac{Fd^2}{I_0}$  = az  $Fd^2$  tehetetlenségi nyomaték mérő viszony-száma vonatkozással az alapul fölvetett  $I_0$  tehetetlenségi nyomatékre;  $a$   $b$  alkamasan választandó két alaphosszaság és  $b_1 = \frac{b}{\alpha}$ . (Hasonlítsd ezeket össze az e §-ban az 1a—1b. pontokban és az I. R. 2. §. 1. pontban a 2a—2b. képletek kapcsában mondottakkal).

A kérdés tárgyát képező elmozdulásokat tehát egészen hasonló módon lehet, mint a képzelt  $\frac{l}{\tau}$  erők centrifugális nyomatékait megszerkeszteni, mint abban az esetben, ha tömör a merevítő tartó. Ha a láncz erőtani tengelyét (a lánczvonalat) eltorzított ábrákban akkép szerkesztettük meg, hogy az egyik-

ben a  $AB$ , a másikban a  $a_1 b_1$  átfogó vízszintes, (lásd a 2a. és 2b. ábrákat a 2. rajzlapon) akkor a képzelt erőket e lánczvonalon a merevítő tartó főpontjainak függőlegeseiben levő pontokon kell fölvenni. A centrifugális nyomatéki tengelyek egyike az erő irányvonala, másika az elmozdulás egyenese  $AB$ ; s midőn a  $H$ -val arányos elmozdulásokat határozzuk meg, úgy kell tekintenünk, mint ha csak egy  $H=C$  erő működne az  $a_1 b_1$  egyenesben s mintha a  $H$ -val arányos más erők nem léteznének. A rácsrúdakhoz tartozó képzelt erőket, a centrifugális nyomaték megszerkesztésének bármelyik részében, összetevőkre bonthatjuk. Ez összetevőket ama  $a_2 \beta_2$  pontok függőlegeseiben kell fölvennünk a lánczvonalon (az  $a_1 \beta_1$  pontokon), a melyekre a merevítő tartón bontottuk föl a főponton fölvelt képzelt erőt. A  $\varphi_1$  ponton képzelt tetszőleges erő  $a_2 \beta_2$  összetevői a merevítő tartón ugyanis, a mint minden magyarázat nélkül látható, ugyanazok, mint a  $\gamma_1$  ponton fölvelt ugyanannak a képzelt erőnek  $a_1 \beta_1$  összetevői a lánczon.

2—4. *Az az elmozdulás, a melyet a függőtartó, — a függővasak és a horgonylánczok meghosszabbulása idéz elő a húzó igénybevétel következtében a függőtartó  $B$  pontján  $AB$  irányban.*

Az elmozdulásnak itt szóban forgó részeit magától érthetőleg teljesen ugyanazon a módon lehet megszerkeszteni, mint az I. Rész. 2. §. 2—4. sz. pontjaiban tárgyaltattott.

A 2-ik rajzlapon mutatott példában a láncz meghosszabbulása által közvetlenül okozott elmozdulás a 4. sz. képlet szerint, (a melyben  $2l_0=230$  m;  $\varepsilon=\varepsilon_1$ ;  $F_0=3000$  cm<sup>2</sup>;  $a=4$ ;  $\cos \beta=0.990$ ;  $a=75$  m;  $b=100$  m;  $I_0=2200$  m<sup>2</sup> cm<sup>2</sup>)  $c_2=0.359$  m. A láncz és a függővasak meghosszabbulása következtében a csomópontokon bekövetkező forgások által előidézett elmozdulásra nézve 7a. ábra a függővasak meghosszabbulásának ábrája, 7b. a forgási szögekből szerkesztett képzelt erők erőpoligonja; ez ábra  $c_3$  metszéke tehát az elmozdulás, még pedig az 5-ik és 6-ik ábrához képest 1000-szerre nagyobb léptékben rajzolva. ( $\gamma=0.60$ ;  $\Sigma F=4000$  cm<sup>2</sup>;  $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ ; a 6. sz. képletek szerint tehát  $\gamma_1=0.00023$ ;

$\frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu=0.00017$ ; és e helyett a lépték ép említett nagyobbítására  $\gamma_1=0.23$  és  $\frac{\sigma}{\varepsilon_2} \nu=0.17$ -re vététt föl). A horgonylánczok által



okozott elmozdulás végre a 8a. ábrában szerkesztetett meg arra az esetre, ha a horgonyláncz meghosszabbulásánál a *láncz* végső szakaszai hosszabbulnak meg; a 8b. ábrában pedig arra az esetre, ha a felfüggesztő pontok vízszintesen elmozdulhatnak. Mindkét ábrában 100-szorosa nagyobb léptékben van az elmozdulás megszerkesztve, mint az 5. és 6. ábrában. A jobb oldali hídfőn ugyanis  $l_1 = 65$  m;  $\cos \varphi_1 = 0.70$ ;  $F_1 = 4200$  cm<sup>2</sup>, a bal oldalin  $l_2 = 46$  m;  $\cos \varphi_2 = 0.70$ ;  $F_2 = 4200$  cm<sup>2</sup> és így a 6a. kép-  
let szerint  $c'_1 = 0.104$  m;  $c'_2 = 0.073$ , a mi helyett  $c'_1 = 10.4$  m;  $c'_2 = 7.3$  m-re vétetett föl. Ha már most a  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  elmozdulásokat az 5. ábrában a  $c_1$  elmozdulással összegeljük, (a  $c_3$  metszéket itt sem lehetett kitüntetni), akkor az I. Részben mondottak szerint a 6. ábra az *influenzia-ábra a C súly által a függőtartón előidézett reakciók vízszintes H összetevőjére nézve, abban a léptékben, a melyben a  $c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$  hosszúság a C súly mérőhosszasága.*

Abban az esetben, ha az elméleti hidnyílás középvonala a lánczon ugyanaz, mint a merevítő tartón s ha e középvonal két oldalán a lánczon az  $y$  ordináták, a merevítő tartón pedig a  $\Delta s$  és  $I$  méretek szimmetrikusan vannak elrendezve, a 2a és 2b ábrákat egy ábrában lehet egyesíteni, úgy szintén a 4a és 4b ábrákat is. A 4c ábra egészen elmaradhat, úgy szintén a 10b ábra is. A 4c ábra azért, mert ez esetben a  $H$  erő által előidézett  $\Delta a$  és  $\Delta b$  forgások egyenlők s így a 4a ábrában egyszerűen felezní kell a  $\Delta k_1$  metszékek összegét. A 10b ábra pedig abból az okból marad el, mert a  $\Delta k_3$  erőháromszögben (10a ábra) a magasság

$$b_1 = \frac{2ly_2}{y_1 - y_2} = \infty \quad (\text{mert } y_1 = y_2) \text{ és így a 10b ábrában } v = 0.$$

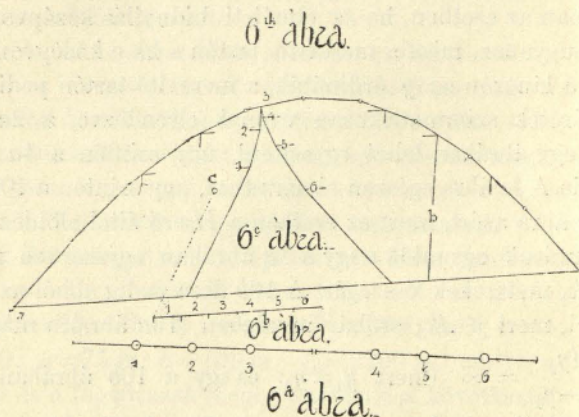
Vége a 9b ábra is elmaradhat, mert a 9a erőpoligont egyesíteni lehet a  $\Delta k_2$  erőpoligonnal (4b ábra) két párhuzamoson rajzolt egy erőpoligonná s e módon a 6. ábrában a kötélpoligont akkép lehet megszerkesztetni, hogy ennek metszékei a  $h_1 - u = h$  ordinátákat közvetlenül adják meg. Az, hogy ha a pilonok között egészen szimmetrikus a hid, valamennyi ábrának csak fele részét kell megszerkesztetni, magától értődik.

2. §. Tetszőleges teher által előidézett  $H$  reakció megszerkesztése.

A megelőző §. szerint a  $c$  mérőhosszaságú súly vízszintes reakciójának mérőhosszasága  $h$  (5. és 6. ábra). Ha tehát a súly  $G$ , akkor a vízszintes reakció  $\frac{h}{c} G$  tetszőleges  $G$  súlyokból álló teher által előidézett  $H'$  reakció tehát

$$H' = \Sigma \frac{hG}{c}.$$

Tegyük föl, hogy a 2. rajzlap 6. ábráját a 6. szövegábra tünteti elő oly módon, hogy a függővasak vetítőibe eső ordináták végpontjai *egyenesek* által köttettek össze. S gondoljuk, hogy a hid a 6a ábrából látható vonattal van megterhelve.

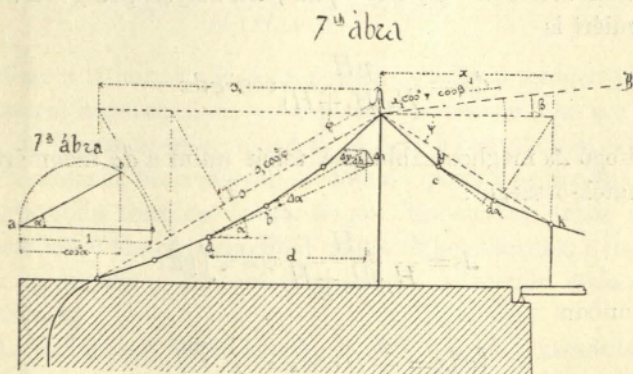


Ha a  $G$  súlyokat a függőlegeseikbe eső  $h$  ordináták végpontjain át a rendező tengellyel párhuzamosan működő erőknek képzelve s az erőháromszögben (6b ábra) a  $c$  csúcspont és az alap közötti *függőleges* (esetleg az alapra nem merőlegesen álló) metszéket  $c$  nagyságúra véve föl, a 6c ábrában kötélpolygon-jukat megszerkesztjük, úgy tehát az a  $H$  metszék, a melyet ez a rendező tengely meghosszabbításán képez, a  $G$  súlyok által a függőtartón előidézett reakció vízszintes összetevőjét adja meg.



3. §. Annak a körülménynek tekintetbe vétele, hogy a függő-tartó egyes szakaszai esetleg nem egyenesek.

Vizsgáljuk még meg, hogy miképen lehet azt a körülményt tekintetbe venni, hogy a lánczoknak a szélső függővasaktól a pilonokig érő részei és a horgonylánczok, minthogy saját súlyuk is hat rájuk, nem egészen egyenesek. E körülmény következtében ugyanis, ha megnagyobbúl az erő, részben kiegyenesednek a függőtartó e részei, mi ugyanazzal a befolyással van a reakcióra, mint ha meghosszabbultak volna a szóban forgó szakaszok.



A mi először is a *horgonylánczot* illeti, legyen  $H_1$  a hid-szerkezet saját súlya által-,  $H$  a mozgó teher által előidézett húzó erő vízszintes összetevője (tehát a reakció vízszintes összetevője ugyanezekben az esetekben),  $\Delta G$  a horgonyláncz egy-egy csomópontjára eső súly. Akkor a horgonyláncz két szomszéd eleme közötti szögben a *függőleges* metszék és ennek a csúcs-ponttól mért távolsága közötti viszonyszám (tekintettel az erő-poligónra) addig, míg csak a saját súly hat a hidra  $\frac{\Delta G}{H_1}$ , miután pedig mozgó teherrel is megterheltetett a hid  $\frac{\Delta G}{H_1 + H}$ . Abban a  $\angle a$  szögben tehát (7. ábra), a mely alatt egy-egy  $ab$  szakasz a mozgó teher működése következtében a megelőző szakaszhoz képest az  $a$  csomópont körül forog

$$\frac{\Delta v}{d} = \frac{\Delta G}{H_1} - \frac{\Delta G}{H_1 + H} = \frac{H \Delta G}{H_1(H + H_1)}.$$

Ha továbbá  $\Delta i \perp ab$ -re szerkesztjük s e  $\Delta i$  függőleges vetületét  $\Delta k$ -val jelöljük, akkor, tekintve hogy  $\Delta k$  a  $P$  ponton a  $\Delta \alpha$  forgás által okozott függőleges elmozdulás

$$\Delta \alpha = \frac{\Delta k}{d} = \frac{\cos^2 \alpha \Delta v}{d} = \frac{H \Delta G}{H_1(H_1 + H)} \cos^2 \alpha.$$

Ha a horgonyláncz erőtaní tengelyét a fenforgó tényállás-hoz képest az egyenestől igen keveset különböző parabolának tekintjük, akkor  $\alpha = \varphi$ ;  $\Delta G = p dx$ ;  $\Delta \alpha$  helyett pedig  $dx$ -át kell írni, miért is

$$dx = \frac{pH}{H_1(H_1 + H)} \cos^2 \varphi dx$$

a s átfogó  $\Delta s$  meghosszabbulása tehát (mint a  $da$  szögmértékek nyomatók-összege):

$$\Delta s = \frac{pH}{H_1(H_1 + H)} \cos^3 \varphi \int y dx$$

itt azonban

$$\int y dx = \frac{2}{3} f s \cos \varphi = \frac{1}{12} \frac{ps_1^3}{H_1}$$

tehát

$$\Delta s = \frac{G_0^2 H}{H_1^2 (H_1 + H)} e$$

hol

$$e = \frac{s_1 \cos^3 \varphi}{12} \left( \frac{G}{G_0} \right)^2$$

hol  $G_0$  alkalmasan fölvev, különben tetszőleges súlyt jelent,  $G$  pedig a horgonyláncz egész függő részének súlyát; megjegyzendő lévén másrészt, hogy az  $s_1 \cos^3 \varphi$  hosszúságot a 7. ábrában vázolt módon lehet megszerkeszteni. Legyen  $e$ -nek értéke a két hídfő horgonylánczára  $e_1$  és  $e_2$  és legyen  $q_1$  a láncz  $B$  pontjának az az  $AB$  irányú elmozdulása, a mely akkor következne be, ha a horgonylánczok meghosszabbulása  $e_1$  és  $e_2$  lenne (s a melyet  $e_1$  és  $e_2$ -ből úgy kell megszerkeszteni, mint az 1. rajzlap 8a,



illet. 8b ábráiban a  $c'_1$  és  $c'_2$ -ből a  $c_4$  szerkesztetett meg), akkor a lánccz  $B$  pontjának az az  $AB$  irányú elmozdulása, a melyet a horgonylánczok részleges kiegyenesülése okoz

$$c_5 = \frac{G_0 H}{H_1^2 (H_1 + H)} q_1$$

A mi pedig a lánczok szélső  $Ak$  szakaszait illeti (7. ábra), ha a föntebb a horgonylánczról mondottak alapján ezeket is az egyenestől kevésé eltérő parabola-alakúaknak vesszük föl, akkor az egyes  $dx$  elemek forgási szögeinek képletei a föntebbiek szerint

$$d\alpha = \frac{pH}{H_1(H_1 + H)} \cos^2 \psi dx.$$

Hogy a láncznak a  $k$  esomópontra következő minden pontja *vízszintesen* mozduljon el, ez csak úgy lehetséges, ha a  $c$  pont körüli  $da$  forgás következtében az  $A$  és a  $k$  pontokon oly forgások következnek be, a melyek eredője a  $c$  pont  $y$  ordinátája másikk végpontján keletkező  $-d\alpha$  forgás. Ez esetben tehát a  $dx$  forgások mérő viszonzyszámaiból *erőpárok* keletkeznek, a melyek az  $Ak$  parabolaív  $y$  ordinátái végpontjain fölveendő  $\pm dx$  erők-ből állanak.

Az itt tárgyalt okból keletkező  $AB$  irányú elmozdulás tehát, mint e képzelt erőpárok nyomatéka az  $AB$  egyenesre nézve:

$$c_6 = \frac{pH}{H_1(H_1 + H)} \cos^2 \psi \cos \beta \int y dx$$

hol, mint föntebb

$$\int y dx = \frac{1}{12} \frac{px_1^3}{H_1}$$

tehát

$$c_6 = \frac{G^2 H}{H_1^2 (H_1 + H)} \cdot \frac{x_1 \cos^2 \psi \cos \beta}{12}$$

hol  $G$  az  $Ak$  lánczrész súlya s hol az  $x_1 \cos^2 \psi \cos \beta$  hosszasa-got megint igen egyszerűen meg lehet szerkesztetni. Számítsuk ki e képlet változó szorzóját mindkét pilon melletti szélső sza-kaszra s legyen ezek összege

$$\left(\frac{G_1}{G_0}\right)^2 \frac{x_1 \cos^2 \phi_2 \cos \beta}{12} + \left(\frac{G_2}{G_0}\right)^2 \frac{x_2 \cos \phi_2 \cos \beta}{12} = q_2$$

akkor az egész itt szóban forgó  $AB$  irányú elmozdulás

$$c_6 = \frac{G_0^2 H}{H_1^2 (H_1 + H)} q_2$$

A  $H$ -val arányos többi elmozdulások összegét  $H=C$  föltételre már fentebb megszerkesztettük (a  $c$  metszék a 2-ik rajz-lapon az 5. ábrában),  $\nu$ -szerre eltorzított léptékben. Ha tehát az erő  $H$ , akkor az az elmozdulás  $= \frac{c}{\nu C} H$ . A  $H$ -tól független elmozdulás pedig a  $C$  súlyra szintén  $\nu$ -szeres torzításban  $=h$  (6. ábra) a tetszőleges  $G$  súlyokból álló megterhelésre tehát  $= \Sigma \frac{h}{\nu C} G$ . Minthogy pedig az egész elmozdulás zérust tesz, ez okból áll tehát, hogy:

$$\frac{c}{\nu C} H + \frac{G_0^2 H (q_1 + q_2)}{H_1^2 (H_1 + H)} - \Sigma \frac{h}{\nu C} G = 0;$$

a miből

$$H^2 + H \left\{ H_1 + \frac{\nu C G_0^2 (q_1 + q_2)}{c H_1^2} - \Sigma \frac{h}{c} G \right\} - H_1 \Sigma \frac{h}{c} G = 0.$$

De itt a 3b egyenletből

$$\nu C = \frac{\varepsilon I_0 a^2}{ab \cos \beta}$$

$\Sigma \frac{h}{c} G$  pedig az a  $H$  reakció, a melyet a  $G$  súly rendszerre akkor találunk, ha egyelőre *nem* vesszük tekintetbe a szélső láncz-szakaszok és a horgonylánczok görbületét, tehát az a  $H$  reakció, a melyet a 6—6a szövegábrákban megmutatott módon lehet megszerkeszteni. Ha ezt  $H'$ -el jelöljük meg, akkor a  $H$  kiszámítására tehát a következő egyenlet származik e föntebiből:

$$H^2 + PH - \Theta = 0,$$

a melyben



$$P = H_1 + \frac{\varepsilon a^2 I_0 G_0 (q_1 + q_2)}{abc H_1^2 \cos \beta} - H'$$

$$\Theta = H_1 H'.$$

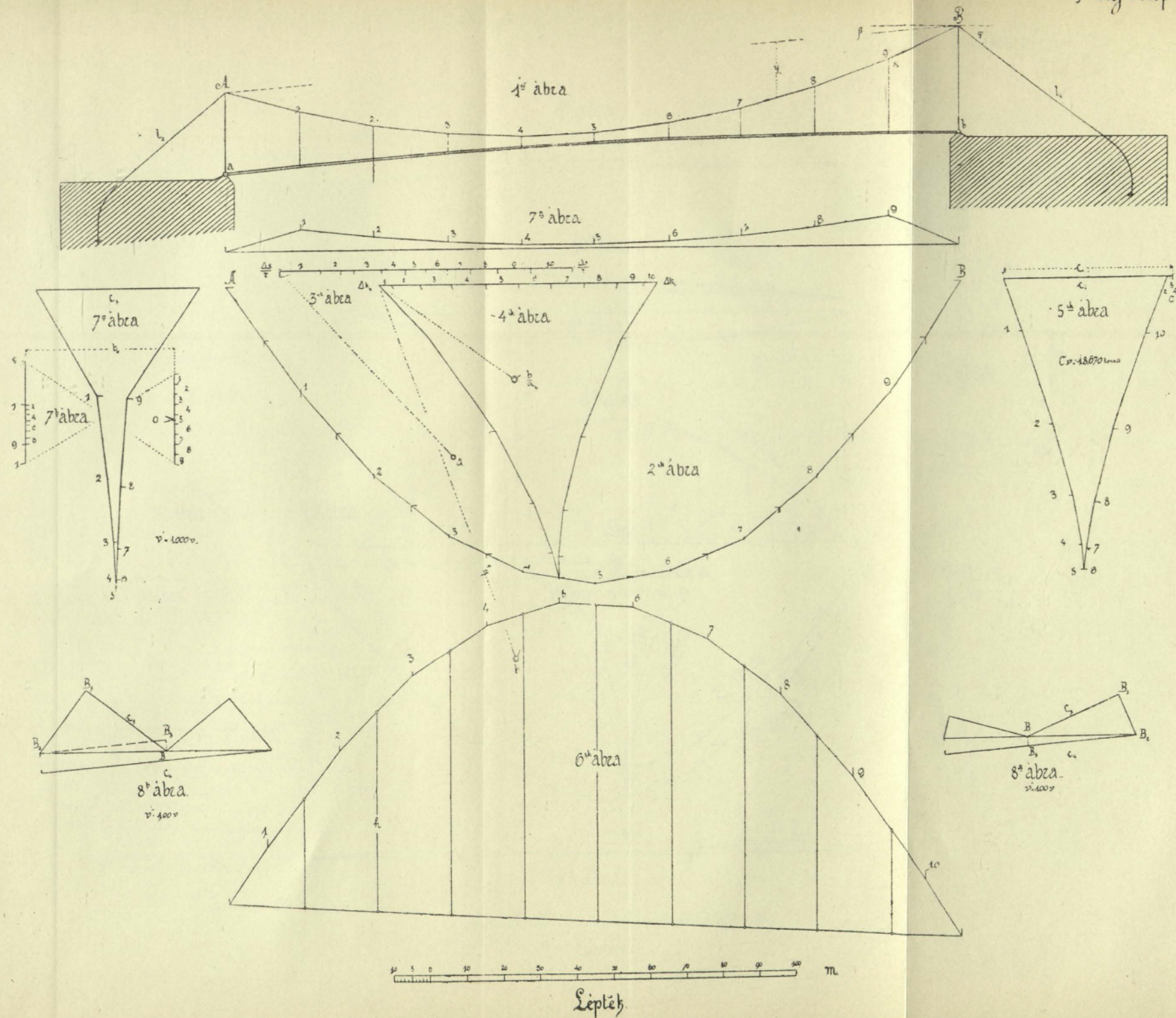
Végül még csak az jegyzendő meg, hogy a  $c_5$  és  $c_6$  elmozdulások meghatározása akkor sem okoz nehézséget, ha a láncznak itt szóban levő szakaszait nem lehet az egyenestől igen kevésé eltérő paraboláknak tekinteni. Ez esetben ugyanis

$$\Delta a = \frac{H}{H_1 + H} \zeta; \quad \text{hol } \zeta = \frac{\Delta G}{H_1} \cos^2 a.$$

Megszerkesztjük most már a  $\cos^2 a$ -kat (pl. a 7a ábrában vázolt módon, a melyben  $abc$  félkör,  $ab$  pedig elemről elemre párhuzamosan szerkesztendő a lánczvonallal); erre megszerkesztjük kötélpoligon segítségével a  $\zeta$ -kat mint nyomatókat, a  $\cos^2 a$ -kat távolságoknak, a  $\Delta G$ -ket erőknak tekintve, vagy megfordítva. (Ha  $\Delta G$  állandó, akkor közvetlenül szerkesztjük meg a  $\frac{\Delta G}{H_1} \cos^2 a$ -kat, úgy mint fentebb a  $\cos^2 a$ -kat.) Erre megrajzoljuk a szóban forgó lánczszakasz vetületét, eltorzítva rajzolva a függőleges ordinátákat s a  $\Delta a$ -ák helyett a velök arányos  $\zeta$ -kat tekintve a forgási szögek mértékeinek s kötélpoligon segítségével megszerkesztjük ezek nyomatókát.

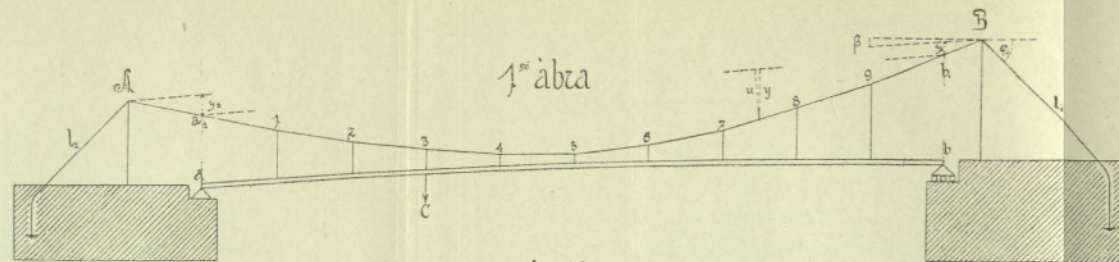
Ha ezt utólag  $\frac{H}{H_1 + H}$ -val szorozzuk, megnyerjük a keresett  $c_5$  vagy  $c_6$  elmozdulást s újból fölláthatjuk azon a módon, mint fentebb történt, az elmozdulási egyenletet, a melyből viszont a  $H$  erőt lehet meghatározni.



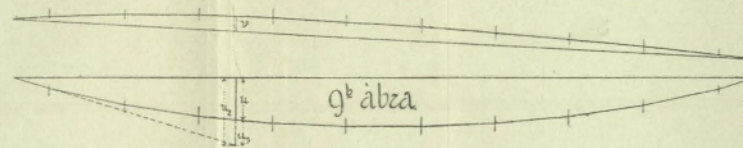




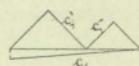
2<sup>th</sup> rajzlap



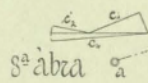
1<sup>st</sup> abra



10<sup>th</sup> abra

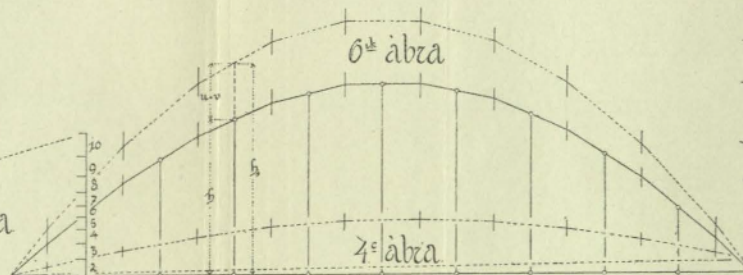


8<sup>th</sup> abra

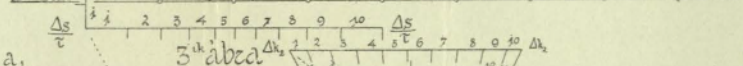


9<sup>th</sup> abra

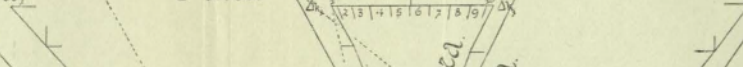
9<sup>th</sup> abra



6<sup>th</sup> abra



4<sup>th</sup> abra



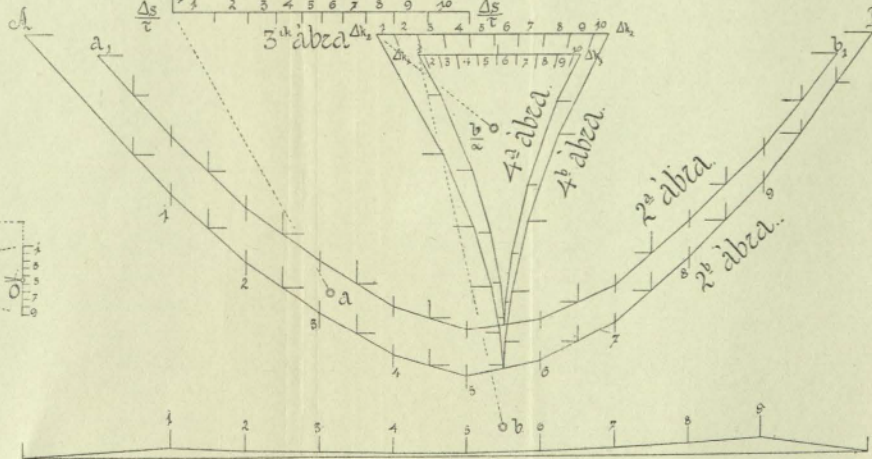
3<sup>rd</sup> abra

4<sup>th</sup> abra

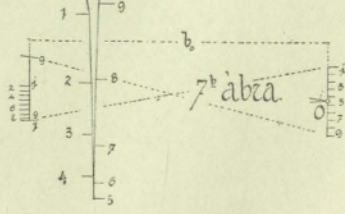
4<sup>th</sup> abra

2<sup>nd</sup> abra

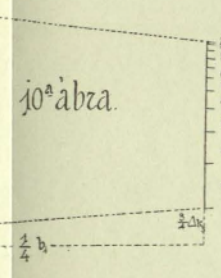
2<sup>nd</sup> abra



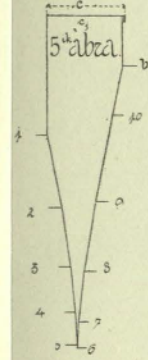
7<sup>th</sup> abra



7<sup>th</sup> abra

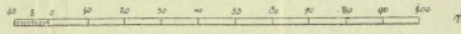


10<sup>th</sup> abra



5<sup>th</sup> abra

C = 9400 tonna



Lépték.



XXI. *Hunyady Jenő*. Tételek a componalt determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula*. A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon*. Vonálegeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János*. A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő*. A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

#### Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól*. Egy tábla rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter fizikájához az 1880-ik évből. Egy függeléssel. *Konkoly Miklóstól*. — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától*. — IV. szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól*. Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól*. — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól*. — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól*. — VIII. szám. Új villámzáró vagy nyitókészülék normálórán, és a Jürgensen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól*. Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól*. — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendű partialis differentialegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától*. — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kipolnai Pauer Istvántól*. Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendű felületről. *Hunyady Jenőtől*.

#### Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól*. — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől*. — III. szám. A herényi astrophysikai observatorium leírása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől*. — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól*. — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól*. — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól*. — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars fizikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól*. — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól*. — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországon megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótól*. — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől*. — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól*. — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata, (A math. és természettudományi állardó bizottság segélvezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól*. — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától*.

#### Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól*. — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. a) A Wells-üstökös szinképe. b) A szeptemberi nagy üstökös szinképe. c) 9 Meteor szinképe. d) 115 állócsillag spectuma. e) Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól*. — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól*.



IV. Egy új reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlítva a meteoritokkal. *Konkoly Miklóstól.* — VII. Egy új szerkezetű spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtol.* — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók fizikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól.* — X. Egy új spectroscop. (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtol.* — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy táblával.) I. rész. a)  $\gamma$  Cassiopejae spectruma. b)  $\alpha$  Ursae minoris spectruma. c) A Swift üstökös spectruma. d) A Brooks üstökös spectruma. e) Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

#### Tizennegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtol.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtol.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhidrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtol.*

#### Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtol.* — IV. Hullócsillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 könnyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter fizikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtol.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880—1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hüniger Adolftól.* — X. Az 1873. VII. sz. Coggia-Winneke-féle üstökös pályaszámítása. *Schulhof Lipóttól.* — XI. A folytonos spectrumok elmélete. *Kövesligethi Radótol.*

#### Tizenharmadik kötet.

I. A földnehézség meghatározása Budapesten 1885-ben (4 táblával.) *Gruber Lajostól.* — II. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1885-ben. *Konkoly Miklóstól.* — III. 855 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.*

#### Tizenegyedik kötet.

I. A dinamika alapegyenleteinek jelentéséről. *König Gyulától.* — II. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. *Hunyady Jenőtol.* — III. Az orthogonális substitutió együtthatóinak paraméteres értékei. (Folytatása az előbbinek.) *Hunyady Jenőtol.*